

HÀ HUY KHOÀI



CÁC NHÀ TOÁN HỌC
ĐƯỢC
GIẢI THƯỞNG

FIELDS

(1936 - 2006)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HÀ HUY KHOÁI

**CÁC NHÀ TOÁN HỌC
ĐƯỢC GIẢI THƯỞNG FIELDS
(1936-2006)**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Khi được đề nghị viết một cuốn sách giới thiệu về những nhà toán học được Giải thưởng Fields, tôi đã vui vẻ nhận lời, bởi vì tìm hiểu về những kết quả xuất sắc nhất của toán học là điều mà người làm toán nào cũng mong muốn. Dĩ nhiên tôi cũng hình dung được những khó khăn đang chờ đợi mình: các kết quả cần đề cập đến trong sách là những kết quả ở mức cao nhất, sâu sắc nhất, và bao gồm tất cả các lĩnh vực của toán học, nên khó có thể hiểu được, dù là sơ lược, lại càng khó hơn nếu viết theo ngôn ngữ không quá sâu về chuyên ngành. Mặc dù vậy, tôi cũng mạnh dạn thử làm công việc khó khăn đó, một phần vì lâu nay cũng đã tìm hiểu ít nhiều, mặt khác vì cũng đã có may mắn được cùng học, cùng làm việc hoặc gặp gỡ khoảng gần một nửa những nhà toán học được Giải thưởng Fields. Khi bắt tay vào công việc, khó khăn đã hình dung trước đây thực tế là vượt quá sự tưởng tượng của tôi. Nhưng đã nhận việc thì không thể nghĩ đến chuyện thoái lui, nên đành cho ra đời cuốn sách, dầu biết rằng còn rất nhiều sai sót, với hy vọng độc giả lượng thứ và góp ý để có thể sửa chữa, bổ sung cho cuốn sách được hoàn thiện dần. Tôi cũng muốn viết thêm về một số nhà toán học không được Giải thưởng Fields, nhưng được những giải thưởng cao quý khác như Giải Nobel (John Nash, Kontorovich), Giải thưởng Wolf (Hirzebruch, Manin,...), Giải thưởng Abel, v.v... Tiếc rằng thời gian có hạn nên đành khất lại lần sau.

Những gì viết trong cuốn sách này về những nhà toán học được Giải thưởng Fields đều dựa trên những tư liệu sau đây: các tiểu sử, hồi ký của các nhà toán học, các bài giới thiệu những công trình được Giải thưởng Fields, hoặc là những điều tác giả biết được qua những lần tiếp xúc trực tiếp hay đọc các công trình của họ. Không có một chi tiết nào là “hư cấu” theo kiểu viết “chuyện danh nhân”. Tác giả làm như vậy với hy vọng rằng, chúng ta có thể học tập được nhiều điều qua những tư liệu chân thực về cuộc đời và sự nghiệp của các nhà toán học được Giải thưởng Fields.

Tác giả chân thành cảm ơn các biên tập viên Nhà xuất bản Giáo dục: Tiến sĩ Trần Phương Dung, Thạc sĩ Hoàng Xuân Vinh; và các Giáo sư Đoàn Quỳnh, Hoàng Xuân Sính vì sự động viên, cộng tác và những ý kiến đóng góp quý báu.

Hà Nội, 2007

TÁC GIẢ

GIẢI THƯỞNG FIELDS

Người ta thường nhắc một câu nói rất hay của Franz Neumann: "*Phát hiện ra một chân lý mới là niềm hạnh phúc tuyệt vời, còn sự thừa nhận dường như không góp được gì thêm*". Câu nói đó dường như để nói về Perelman, người đã từ chối mọi giải thưởng dành cho mình với thành tựu chứng minh giả thuyết Poincaré, còn nói chung thì câu đó cũng chỉ đúng được một nửa! Theo Niels Bohr, một câu nói ngược lại cũng đúng! Nghĩa là, các giải thưởng - sự thừa nhận của cộng đồng- là điều hết sức quan trọng đối với mỗi nhà khoa học. Vì lẽ đó mà đến nay có rất nhiều giải thưởng dành để tôn vinh các nhà khoa học đạt những thành tựu kiệt xuất. Nổi tiếng và uy tín nhất có lẽ là giải Nobel, tiếc rằng giải thưởng đó không dành cho toán học. Vậy nên, các nhà toán học phải đặt ra một giải thưởng tương tự cho ngành khoa học của mình: Giải thưởng Fields. Hầu như mọi người đều thống nhất rằng, Giải thưởng Fields trong toán học là "tương đương" với giải Nobel của các ngành khoa học khác, xét về uy tín và tầm cao của các thành tựu được giải.

Bài này nhằm giới thiệu sơ qua lịch sử Giải thưởng Fields, và nói đôi điều về sự phát triển của toán học khoảng 60-70 năm gần đây, nếu nhìn qua các Giải thưởng Fields.

Tuy nhiên, toán học hiện đại cũng gần như nghệ thuật hiện đại và thơ ca, mỗi người hiểu và cảm nhận theo cách của mình. Bởi thế, khi nói về cùng một thành tựu, có người thì ca ngợi hết lời, người khác lại cho là nó hoàn toàn vô ích!



John Charles Fields (1863-1932), Nhà toán học Canada

1. Đôi dòng lịch sử

Không ai biết chính xác tại sao Nobel, khi đặt giải thưởng cho các ngành khoa học, lại loại toán học ra ngoài. Có nhiều lời đồn đại rằng, nguyên nhân là mối quan hệ không bình thường của Mittag-Leffler với vợ của Nobel. Mittag-Leffler là nhà toán học nổi tiếng nhất của Thụy Điển thời đó, và nếu có giải thưởng giành cho toán học thì hầu chắc chắn, ông sẽ là người đầu tiên nhận được. Tuy nhiên, lời đồn đó không đúng, vì Nobel chưa có vợ bao giờ! Người ta cũng đồn rằng quan hệ giữa Nobel và Mittag-Leffler không được tốt. Mặc dù không có tài liệu nào ghi nhận, nhưng có vẻ như lời đồn đó có cơ sở. Ít nhất thì Fields đã từng nói đến điều đó. Năm 1890 Nobel đã lật ngược đề nghị của Mittag-Leffler về việc dành một ghế giáo sư cho Sophia Kovalevskaja tại Trường đại học Stockholm. Nhưng cũng thật trớ trêu, những năm đầu tiên sau khi Nobel qua đời (1896), chính Mittag-Leffler là người đóng vai trò quyết định trong việc xét trao Giải thưởng Nobel, và làm cho giải thưởng đó trở thành giải thưởng quốc tế uy tín nhất.

Có thể nói, lịch sử của Giải thưởng Fields bắt đầu từ buổi họp của Ủy ban Đại hội quốc tế tại trường Đại học Toronto tháng 11 năm 1923, bàn về việc tổ chức Đại hội vào năm 1924 tại Toronto. Lúc đó, Fields là Chủ tịch của Ủy ban, và bạn ông, J.L.Synge là thư ký. Fields đề nghị lập ra một giải thưởng nhằm ghi nhận những công trình vừa kiệt xuất, vừa có nhiều hứa hẹn phát triển trong tương lai. Có lẽ đó là điều khác biệt đầu tiên giữa Giải thưởng Fields và Giải Nobel: trong khi giải Nobel gần như ghi nhận cống hiến của cả một đời người, thì Fields nhằm mục đích hướng đến tương lai: vừa tôn vinh thành tựu đạt được, vừa khuyến khích những phát triển tiếp theo. Vì thế, Giải thưởng chỉ được trao cho những nhà toán học không quá 40 tuổi vào năm họp Đại hội. Đối với toán học, việc hạn chế ở tuổi 40 khá hợp lý: trong thực tế, phần lớn các nhà toán học đạt được thành tựu xuất sắc nhất của mình trong lứa tuổi đó. Một điều khác biệt nữa là giải Nobel được trao hàng năm, trong khi giải Fields chỉ được trao bốn năm một lần, vào các kỳ Đại hội toán học thế giới.

Giải thưởng Fields được trao lần đầu tiên năm 1936 ở Oslo, và lần thứ hai năm 1950 ở Cambridge. Vì người được xét trao giải thưởng phải có tuổi đời không quá 40, mà khoảng cách giữa lần trao giải thưởng thứ nhất và thứ hai lại quá lớn, nên nhiều người sinh ra trong khoảng từ năm 1900 đến năm 1910 không có cơ hội được xét thưởng. Trong số đó có những nhà toán học kiệt xuất như A. Kolmogorov, H. Cartan, A. Weil, J. Leray, L. Pontriagin, S. S. Chern, S. Whitney.

Lúc đầu, Hội toán học quốc tế quyết định chỉ trao không quá hai giải thưởng trong mỗi kỳ đại hội. Tuy nhiên, tại Đại hội năm 1966 đã đạt được thoả thuận là, do sự phát triển mạnh mẽ của toán học, mỗi kỳ Đại hội có thể xét trao đến 4 giải thưởng. Theo đề nghị ban đầu của Fields, giải thưởng phải có tính chất thuần túy quốc tế, nên không được gắn với tên của bất kỳ quốc gia hay cá nhân nào. Tuy vậy, trái với ý định ban đầu của ông, giải thưởng được mang tên “Huy chương Fields” ngay lần đầu tiên được trao, năm 1936 tại Đại hội toán học thế giới ở Oslo (khi đó Fields không còn nữa). Có một điều thú vị cũng cần được nhắc đến, đó là Đại hội quyết định rằng ông Chủ tịch cần phải gặp Thủ tướng Canada để thoả thuận, nếu có thể, về một quỹ thường xuyên, có lãi suất, giành cho giải thưởng. Tuy nhiên, sự thoả thuận đó chưa bao giờ đạt được, và giá trị bằng tiền của Giải thưởng Fields hiện nay là vào khoảng 15 000 đôla Canada, tức khoảng 10 000 đôla Mỹ. Vì thế, khi ta nói rằng “Giải thưởng Fields tương đương Giải thưởng Nobel trong các ngành khoa học khác” là nói về giá trị khoa học và vinh dự của giải thưởng, chứ hoàn toàn không phải là sự “tương đương” về tiền bạc! Có lẽ điều đó cũng có phần hợp lý, vì nói chung toán học chẳng “tương đương” được với lĩnh vực nào, nếu xét theo thu nhập của những người đứng hàng đầu trong mỗi lĩnh vực!

Fields đã cố gắng để đẩy nhanh việc trao giải thưởng, nhưng ông đổ bệnh tháng 5 năm 1932, và qua đời ba tháng sau đó. Trước khi mất, với Singe bên cạnh, ông đề nghị góp 47000 đôla của mình vào quỹ giải thưởng. Singe đã chuyển đề nghị của Fields đến Đại hội tại Zurich tháng 9 năm đó. Đề nghị được chấp nhận, và một uỷ ban gồm G. D. Birkhoff, Caratheodory, E. Cartan, Severi và Takagi được thành lập để xét trao giải lần đầu tiên tại Đại hội Oslo 1936. Họ đã chọn Lars Ahlfors của Phần Lan và Jesse Douglas của Hoa Kỳ.

Từ sau năm 1936, tình hình thế giới trở nên căng thẳng, và tiếp sau đó là Đại chiến thế giới lần thứ hai. Các Đại hội toán học không tổ chức được. Đại hội đầu tiên sau chiến tranh nhóm họp năm 1950 ở Cambridge, Massachusetts, Hoa Kỳ. Tại đại hội này, Laurent Schwartz và Atle Selberg được trao Giải thưởng Fields.

Chính Fields đề nghị huy chương phải bằng vàng có giá trị ít nhất là 200 đôla (tính theo thời điểm 1933, có giá trị hơn ngày nay nhiều!), có kích thước hợp lý, khoảng 7,5 cm đường kính. Vì tính quốc tế của nó, các dòng chữ trên huy chương phải viết bằng tiếng Hy Lạp hoặc Latin. Giá trị bằng tiền của tấm huy chương đôi khi cũng trở nên thật là quan trọng: vào thời kỳ khó khăn sau Đại chiến thứ II, Ahlfors phải xa vợ, và khi rời Phần Lan, ông chỉ được phép mang theo có 10 curon. Ông đã dấu

tám huy chương trong túi, đem cầm cố nó để có tiền lo cho vợ đến Zurich, Thụy Sĩ. Về sau, ông chuộc lại được tám huy chương nhờ sự giúp đỡ của một số người bạn Thụy Sĩ.

Huy chương Fields được đúc bốn năm một lần tại Sở đúc tiền Hoàng gia Canada, và được thiết kế bởi nhà điêu khắc R.Tait McKenzie.

Mặt trước của tám huy chương có hình khuôn mặt Archimedes nhìn từ bên phải. Trước mặt ông là dòng chữ: APXIMHAOYΣ, tiếng Hy Lạp có nghĩa là “*khuôn mặt của Archimedes*”. Dòng chữ “RTM, MCNXXXIII” là viết tắt tên tác giả huy chương, nhà điêu khắc Robert Tait McKenzie, và năm 1933 (chữ số La Mã, nhưng viết sai! Lẽ ra phải là MCMXXXIII).

Dòng chữ TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI, tiếng latin, có nghĩa là “*hãy hướng đến sự hiểu biết và làm cho bạn trở thành chủ nhân của vũ trụ*”. Đó là câu trong tác phẩm *Astronomica* của nhà thơ La Mã Manilius từ thế kỷ thứ 1.



Mặt sau của huy chương có cành ôliu và dòng chữ “CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE”, trong tiếng latin có nghĩa là “*Các nhà toán học từ khắp thế giới họp tại đây tặng huy chương này vì công trình xuất sắc*”. Cũng ở mặt sau còn có hình một mặt cầu Archimedes nội tiếp trong một hình trụ (nhắc đến bài toán cầu phương nổi tiếng của Archimedes).

Tên của người được tặng giải thưởng được khắc bên vành của huy chương.

Kể từ khi đặt ra giải thưởng, đã có những nhà toán học sau đây được khắc tên mình vào huy chương:

1936

Lars Valerian AHLFORS

(Phân lan)

Jesse DOUGLAS

(Hoa Kỳ)

1950

Laurent SCHWARTZ

(Pháp)

Atle SELBERG

(Na Uy)

1954

Kunihiko KODAIRA

(Nhật)

Jean-Pierre SERRE

(Pháp)

1958

Klaus Friedrich ROTH

(Anh)

René THOM

(Pháp)

1962

Lars HORMANDER

(Thụy Điển)

John Willard MILNOR

(Hoa Kỳ)

1966

Michael Francis ATIYAH

(Anh)

Paul Joseph COHEN

(Hoa Kỳ)

Alexander GROTHENDIECK

(Pháp)

Stephen SMALE

(Hoa Kỳ)

1970

Alan BAKER

(Anh)

Heisuke HIRONAKA

(Nhật)

Sergey NOVIKOV

(Nga)

John Griggs THOMPSON

(Hoa Kỳ)

1974

Enrico BOMBIERI

(Italia)

David Bryant MUMFORD

(Hoa Kỳ)

1978

Pierre René DELIGNE

(Bỉ)

Charles Louis FEFFERMAN

(Hoa Kỳ)

Gregori Alexandrovitch MARGULIS

(Nga)

Daniel G. QUILLEN

(Hoa Kỳ)

1982

Alain CONNES	(Pháp)
William P. THURSTON	(Hoa Kỳ)
Shing-Tung YAU	(Hoa Kỳ)

1986

Simon K. DONALDSON	(Anh)
Gerd FALTINGS	(Đức)
Michael H. FREEDMAN	(Hoa Kỳ)

1990

Vladimir DRINFELD	(Nga)
Vaughan F.R. JONES	(New Zealand)
Shigefumi MORI	(Nhật)
Edward WITTEN	(Hoa Kỳ)

1994

Jean BOURGAIN	(Bi)
Pierre-Louis LIONS	(Pháp)
Jean-Christophe YOCOZ	(Pháp)
Efim ZELMANOV	(Nga)

1998

Richard E. BORCHERDS	(Hoa Kỳ)
W. Timothy GOWERS	(Anh)
Maxim KONTSEVICH	(Nga)
Curtis T. MCMULLEN	(Hoa Kỳ)

2002

Laurent LAFFORGUE	(Pháp)
Vladimir VOEVODSKY	(Nga)

2006

Grigory PERELMAN	(Nga)
Andrey OKOUNKOV	(Nga)
Terence TAO	(Australia)
Wedelin WERNER	(Pháp)

2. Toán học nhìn qua các Giải thưởng Fields

Có hai nguyên tắc cơ bản khi xét trao Giải thưởng Fields: một là giải được một bài toán lớn, hai là đưa ra một lý thuyết mới có nhiều ứng dụng trong toán học. Hai nguyên tắc này đều quan trọng trong sự phát triển của toán học. Rõ ràng, chúng không hoàn toàn độc lập. Thường thì lời giải một bài toán cụ thể phải dựa trên sự sáng tạo ra một lý thuyết mới (nếu dùng công cụ sẵn có thì chắc là đã có người giải được!). Ngược lại việc sáng tạo ra một lý thuyết mới có ý nghĩa lớn sẽ giúp giải quyết một số bài toán cổ điển tồn đọng của toán học.

Ngoài Giải thưởng Fields đầu tiên được trao năm 1936, các giải thưởng đều liên quan đến toán học của nửa sau thế kỷ 20, và một số năm đầu tiên của thế kỷ 21.

Kể từ năm 1936 đến nay, những thành tựu đạt được trong các công trình của những nhà toán học được Giải thưởng Fields đã phản ánh xu hướng của sự phát triển toán học trong 70 năm qua. Đại chiến thế giới thứ hai có ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển của xã hội và khoa học. Cũng như nhiều ngành khoa học khác, toán học phát triển một cách "liên tục, nhưng không khả vi", vì bao giờ cũng có những cột mốc mà qua đó có sự thay đổi đột biến. Sự phát triển của toán học sau đại chiến thứ hai là một minh chứng rõ ràng cho quan điểm nói trên. Nếu nhìn vào đồ thị của sự phát triển toán học, ta thấy có sự chuyển biến rõ ràng các mối quan tâm qua mỗi thời kì chiến tranh. Về một khía cạnh nào đó, điều này có lẽ được lý giải như sau. Khoa học bao giờ cũng có tính bảo thủ nhất định, và nói như Nietzsche, *những tư tưởng lớn xuất hiện trên thế giới với những bước đi khế khàng*, vì chúng phải chống lại những cản trở to lớn, và đòi hỏi một quá trình thử nghiệm lâu dài. Max-Planck có lần nói đùa rằng, *"một chân lý khoa học mới không phải toàn thắng vì chinh phục được những người chống lại nó, mà thường là do những người chống lại nó chết dần, và thế hệ mới lớn lên cùng với nó!"*. Những cuộc chiến tranh thế giới tàn khốc đã cướp đi sinh mạng của cả một thế hệ những nhà khoa học, và điều đó vô tình thúc đẩy quá trình khách quan của sự thừa nhận những quan điểm mới.

Nếu nhìn vào các giải thưởng năm 1936 và 1950, ta thấy rằng, sự bùng nổ của những mối quan tâm đến tô pô đại số và hình học đại số trong những năm đầu sau Đại chiến thế giới thứ II chưa được phản ánh trong giải thưởng đầu tiên sau chiến tranh. Giải thưởng năm 1950 được trao cho Laurent Schwartz về lý thuyết phân bố, và Alte Selberg vì những thành tựu xuất sắc trong lý thuyết số, cụ thể là các kết

quả về phân bố không điểm của hàm zeta Riemann và chứng minh "sơ cấp" của luật phân bố tiệm cận các số nguyên tố. Nhưng năm 1954, giải thưởng được trao cho Serre và Kodaira vì những thành tựu đạt được sau chiến tranh. Hermann Weyl, Chủ tịch Ủy ban giải thưởng năm 1954, trong lời phát biểu của mình đã nói rằng, rất khó phân biệt lĩnh vực nghiên cứu của hai nhà toán học được giải thưởng. Ông nói: "Người ta có thể có cảm tưởng rằng Ủy ban chúng tôi thiên vị khi trao Giải thưởng Fields cho hai nhà nghiên cứu mà lĩnh vực quá gần nhau. Ủy ban có nhiệm vụ nói rằng, mặc dù có những điều chung nhau trong phương pháp, họ cho lời giải của những bài toán đặc biệt khó khăn và hoàn toàn khác nhau". Có thể nói rằng, đây chính là điểm khởi đầu cho sự "nhất thể hoá" trong toán học, quá trình xoá nhoà ranh giới giữa các ngành của toán học thể hiện rõ ràng qua các Giải thưởng Fields từ 1954 đến ngày nay.

Trong những lần tiếp theo, ta thấy có sự cân bằng giữa hai nguyên tắc của việc trao giải. Chẳng hạn, năm 1958, Klaus Roth được tôn vinh nhờ chứng minh một ước lượng tinh tế, làm mạnh định lý của Thue-Siegel về xấp xỉ các số đại số bởi các số hữu tỷ. Giải thưởng thứ hai giành cho René Thom, người xây dựng nên một phương pháp mạnh mẽ trong tôpô là lý thuyết cobordism.

Năm 1962, các nhà toán học được trao giải là Lars Hormander và John Milnor. Lars Hormander đã phát triển lý thuyết tổng quát các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, bao gồm lý thuyết các toán tử hypoelliptic. Công trình của Milnor thực sự gây bất ngờ và có ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển tương lai của tôpô. Rất khó tìm thấy một cái gì tương tự trong quá khứ, như việc xây dựng vô cùng đẹp đẽ của Milnor về các cấu trúc vi phân khác nhau trên mặt cầu 7 chiều. Về sau, kết quả này đã trở thành hòn đá tảng cho một lĩnh vực mới của tôpô, đó là tôpô vi phân. Chứng minh ban đầu của Milnor không thực sự là một chứng minh kiến thiết, nhưng về sau E. Brieskorn chỉ ra rằng, các cấu trúc vi phân đó có thể mô tả một cách hết sức đẹp đẽ dưới dạng hiện.

Trong Đại hội 1966, bốn giải thưởng đã được trao. Paul Cohen với chứng minh rằng nếu hệ tiên đề Zermelo-Fraenkel là phi mâu thuẫn, thì việc phủ nhận tiên đề chọn, thậm chí phủ nhận cả giả thiết continuum (liên tục) vẫn giữ cho lý thuyết là phi mâu thuẫn. Cho đến nay, đây là Giải thưởng Fields duy nhất giành cho lĩnh vực logic toán học. Alexandre Grothendieck, một trong những nhà toán học vĩ đại nhất và kì lạ nhất của thời đại chúng ta, được trao giải thưởng nhờ việc cách mạng hoá hình học đại số. Quan điểm *lược đồ* của ông đã đưa hình học đại số lên một

mức độ trừu tượng mới, vượt ra ngoài tầm của những nhà toán học với một nền giáo dục truyền thống trước đó. Lý thuyết bó, các dãy phổ, và những phát minh khác trong những năm cuối của thập kỉ 40 và đầu thập kỉ 50 đã được tổng hợp lại trong kỹ thuật phức tạp này. Cũng cần nhấn mạnh rằng, trong toán học không phải sự trừu tượng nào cũng giúp hiểu rõ hơn bản chất. Có nhiều sự trừu tượng vô ích, mà người ta thường gọi là "abstract nonsense". Nhưng, trừu tượng chính là một trong những sức mạnh chủ yếu của toán học. Các công trình tiếp theo của Grothendieck cũng như của nhiều người khác chỉ ra rằng, nhiều bài toán cổ điển của hình học đại số và lý thuyết số tồn tại trong toán học, mặc cho nhiều thế hệ các nhà toán học đã tốn bao công sức để nghiên cứu chúng, cuối cùng đã có thể giải được nhờ các K -hàm tử Grothendieck, các môđin, đối đồng điều l -adic, và nhiều khái niệm phức tạp khác do Grothendieck đưa ra.

Nhận giải thưởng cùng một lần với Cohen và Grothendieck, S. Smale được tôn vinh chủ yếu nhờ hai thành tựu. Thứ nhất là lời giải của giả thuyết Poincaré chiều cao. Giả thuyết Poincaré là một trong những bài toán khó nhất của tôpô. Trong thuật ngữ hiện đại, giả thuyết đó nói rằng *một đa tạp M^n trơn n chiều đơn liên, đóng, với nhóm đồng luân của mặt cầu n chiều, sẽ đồng phôi với mặt cầu n chiều S^n* . Poincaré đã phát biểu giả thuyết này trong trường hợp 3 chiều. Ông tin rằng, một khẳng định mạnh hơn cũng đúng, cụ thể là, *M^n vi phôi với S^n* . Tuy nhiên, sự tồn tại các mặt cầu 7 chiều với các cấu trúc vi phân khác nhau của Milnor chỉ ra rằng, giả thuyết dưới dạng mạnh là không đúng. Smale đã chứng minh một định lý tổng quát về h -cobordism, từ đó suy ra giả thuyết Poincaré đúng với số chiều $n \geq 5$. Khi số chiều là 5 hoặc 6, giả thuyết dưới dạng mạnh đã nêu trên cũng đúng.

Thoạt nhìn có vẻ như vô lý, vì chứng minh giả thuyết Poincaré chiều cao lại dễ hơn việc chứng minh giả thuyết đó trong trường hợp 3 và 4 chiều. Thực ra thì điều này có nguyên nhân khá rõ ràng: trong những chiều cao hơn, ta dễ hơn trong việc "dán" các quai vào một đa tạp cho trước để biến nó thành một đa tạp khác (sai khác đồng luân). Đơn giản là khi có đủ nhiều chiều, ta có "không gian rộng rãi" hơn để rảnh tay làm việc! Tình hình cũng tương tự khi phân loại các đa tạp. Kết quả của Smale là minh họa cho "nguyên tắc thứ nhất của Giải thưởng Fields"¹.

¹ Giả thuyết Poincaré cổ điển (3 chiều) đã được nhà toán học Nga G. Perelman chứng minh năm 2003, và nhờ đó, ông được tặng Giải thưởng Fields năm 2006.

Thành tựu thứ hai của Smale liên quan đến lý thuyết các hệ động lực. Lĩnh vực này có nguồn gốc từ cơ học cổ điển và phương trình vi phân thường. Lý thuyết hệ động lực được phát triển từ đầu thế kỷ 20 bởi H. Poincaré, G. D. Birkhoff, J. Hadamard và I. Bendixson. Vào giữa thập niên 30, nhiều kết quả quan trọng nhận được trong các công trình của E. Hopf, G. Hedlund, M. Morse, A. Andronov, L. Pontriagin và một số người khác. Tuy nhiên, hầu như tất cả đều nghiên cứu trường hợp 2 chiều. Smale đã phát triển lý thuyết lên trường hợp chiều cao. Ông chỉ ra rằng, các hệ động lực ổn định cấu trúc trong chiều cao có những tính chất khác hẳn. Không giống như các hệ động lực 2 chiều được Andronov và Pontriagin nghiên cứu, trong trường hợp chiều cao, các hệ động lực ổn định cấu trúc có thể có vô hạn điểm kì dị, vô hạn chu trình giới hạn... Cấu trúc đầu tiên do ông xây dựng là "móng ngựa" nổi tiếng sinh bởi các tự đẳng cấu rời rạc của xuyên. Ông đưa ra những giả thuyết rất sâu sắc về sự ổn định cấu trúc của các dòng trắc địa trên đa tạp compact có độ cong âm, về sau được chứng minh bởi Anosov, một nhà toán học Nga. Các kết quả này dẫn đến việc sáng tạo ra lý thuyết hệ động lực chiều cao, một lĩnh vực mới của toán học vẫn đang phát triển mạnh mẽ cho đến ngày hôm nay. Các kết quả của Smale cũng là một minh họa tuyệt vời cho "nguyên tắc thứ hai" của Giải thưởng Fields.

Cùng năm với Cohen, Grothendieck và Smale, M. Atiyah được thừa nhận vì những công trình trong lĩnh vực tô pô đại số, đặc biệt là việc chứng minh *Định lý chỉ số*, nổi tiếng với tên gọi Định lý Atiyah-Singer. Đây là một định lý sâu sắc xét trên nhiều quan điểm khác nhau. Trước tiên, nó là sự mở rộng một chuỗi dài các định lý nổi tiếng từ định lý Euler đối với đa diện đến định lý Riemann-Roch và định lý Poincaré-Hopf về kì dị của các trường vectơ.

Chứng minh ban đầu của Atiyah và Singer hết sức phức tạp, sử dụng rộng rãi các thành tựu toán học đạt được trong các lĩnh vực tô pô, hình học, phương trình đạo hàm riêng. Về sau, chứng minh được đơn giản hoá đáng kể, và một điểm cần ghi nhận là trong những năm gần đây, mối quan hệ giữa định lý này với các vấn đề quan trọng trong lý thuyết trường lượng tử, chẳng hạn vấn đề rối lượng tử trở nên rõ ràng hơn.

Các công trình của Atiyah, Singer, Hirzebruch và nhiều người khác đã làm nên một lĩnh vực toán học mới, trong đó các tư tưởng của tô pô đại số, hình học, giải tích phức tích hợp với nhau, xoá nhoà hoàn toàn sự tách biệt truyền thống của các lĩnh vực đó. Atiyah thường nói: "*Các nhà tô pô thường nghiên cứu các toán tử đơn*

giản trên những không gian phức tạp, trong khi các nhà giải tích nghiên cứu các toán tử phức tạp trên những không gian đơn giản". Đã đến lúc cần, và có thể, nghiên cứu các toán tử phức tạp trên những không gian phức tạp.

Các kết quả nêu trên không chỉ đưa toán học lên một mức độ trừu tượng mới, mà còn chứng tỏ tính hiệu quả của những phương pháp trừu tượng đó trong việc giải quyết những bài toán cổ điển nổi tiếng còn tồn đọng. Một trong những ví dụ tốt nhất là lời giải của J. Adams cho bài toán nổi tiếng về sự tồn tại các đại số chia. Từ thời Cayley, người ta đã biết các đại số chia sau đây: các số thực, các số phức, các quaternion, các số Cayley. Khi số chiều tăng lên, ta mất dần các tính chất, chẳng hạn quaternion là không giao hoán. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là: còn có các đại số chia khác hay không? Câu trả lời phủ định chỉ được tìm thấy vào năm 1960, mà chứng minh lại liên quan mật thiết với một bài toán tô pô sau đây: Tìm tất cả các mặt cầu mà số trường vectơ độc lập trên đó đúng bằng số chiều của mặt cầu. Cả thảy chỉ có 3 mặt cầu như vậy: S^1 , S^3 , và S^7 .

Có vẻ như kể từ sau năm 1970, những thành tựu được trao Giải thưởng Fields ngày càng gần hơn với các vấn đề của vật lý. Điều đó thể hiện rõ rệt nhất trong những công trình của S. Novikov, S. T. Yau, A. Connes, S. Donaldson, E. Witten, V. Drinfeld, M. Kontsevich. Đặc biệt Witten là nhà vật lý đầu tiên nhận được Giải thưởng Fields. Gần đây nhất, các kết quả của tất cả những người được Giải thưởng Fields năm 2006 - Okounkov, Perelman, Tao, Werner - đều liên quan chặt chẽ với vật lý. Mối liên hệ giữa toán học và vật lý không chỉ còn là mối liên hệ truyền thống, ở đó vật lý sử dụng toán học, và toán học xây dựng những công cụ mới, lý thuyết mới để giải thích các hiện tượng vật lý. Ngày nay đã xuất hiện những kết quả toán học sâu sắc dựa trên những tư tưởng vật lý. Ví dụ điển hình cho xu hướng này là các công trình của Donaldson. Sau công trình của Milnor về các cấu trúc vi phân trên mặt cầu 7 chiều, công trình của Donaldson xuất hiện năm 1983 đã có ảnh hưởng đáng kinh ngạc. Donaldson chứng minh sự tồn tại các cấu trúc vi phân khác nhau trên các đa tạp 4 chiều đơn liên. Ngay sau công trình của Donaldson, Gompf và Taubes chỉ ra sự tồn tại một số vô hạn cấu trúc vi phân trên không gian thực 4 chiều. Kết quả này chứng tỏ không gian rất "quen thuộc" này của vật lý (3 chiều không gian và một chiều thời gian) ẩn chứa nhiều điều chưa được biết

đến, và có hệ quả rất quan trọng trong lý thuyết hấp dẫn, vì ở đó người ta cần lấy tích phân theo mọi metric có thể, và do đó, theo mọi cấu trúc vi phân. Chứng minh của Donaldson và những người khác dựa trên những phát hiện trước đó trong lý thuyết trường, chủ yếu là trong lý thuyết “gauge” các tương tác mạnh và yếu. Sự tương tác đó trong thế giới các hạt cơ bản được mô tả bởi các phương trình phi tuyến có bản chất tô pô sâu sắc: các phương trình Yang-Mills. Cùng với những kết quả trên, các công trình của Drinfeld về nhóm lượng tử và lời giải của Kontsevich cho giả thuyết Witten về lực hấp dẫn là những minh chứng cho một thời kì mới trong mối quan hệ giữa toán học và vật lý.

Sự thống nhất giữa nhiều ngành toán học tưởng chừng rất xa nhau ngày càng được thể hiện rõ ràng, đặc biệt là trong những công trình được trao giải thưởng Fields của những Đại hội gần đây. Đó là sự thống nhất của giải tích, hình học và số học trong các công trình của Lafforgue, Voevodsky (giải thưởng Fields 2002); mối liên quan giữa tổ hợp, giải tích, xác suất và vật lý trong công trình của Okounkov, Werner, là việc Perelman sử dụng những công cụ giải tích mạnh mẽ để giải quyết trọn vẹn giả thuyết Poincaré, một trong những bài toán khó nhất của tô pô, đồng thời mở ra nhiều hệ quả trong vật lý. Các Giải thưởng Fields năm 2006 còn có một điểm đặc sắc khác: đó là sự thống nhất giữa *cấu trúc* và *ngẫu nhiên* trong toán học. Tại đại hội này, Wendelin Werner là nhà nghiên cứu xác suất đầu tiên nhận Giải thưởng Fields. Các kết quả của của Okounkov và Tao đều nhận được với việc sử dụng một số công cụ của lý thuyết xác suất. Đặc biệt, như chính Terence Tao phân tích, chứng minh của ông về định lý tồn tại các cấp số cộng với độ dài tùy ý mà mọi số hạng đều là số nguyên tố có được nhờ tìm hiểu mối quan hệ giữa cấu trúc và ngẫu nhiên. Nếu như tập hợp các số nguyên tố là một tập hợp ngẫu nhiên, thì cấp số cộng lại là một tập hợp có cấu trúc chặt chẽ. Điều đó đã làm cho kết quả của Tao trở nên rất đáng ngạc nhiên, và là một trong những phát hiện lý thú nhất về các số nguyên tố.

Các Giải thưởng Fields cũng chứng tỏ rằng, trong quá trình phát triển, toán học đôi khi cũng ngoái đầu nhìn lại quá khứ trong một ánh sáng mới. Đó là trường hợp của những người đạt Giải thưởng Fields nhờ giải quyết những vấn đề thuộc các

lĩnh vực cổ điển: Jean Bourgain và Tim Gowers giải quyết nhiều vấn đề cổ điển trong lý thuyết không gian Banach; P. L. Lions trong phương trình đạo hàm riêng; Jean-Cristoph Yoccoz, Curtis McMullen trong hệ động lực; Zelmanov với bài toán Burnside cổ điển.

Toán học là một thể thống nhất. Tuy nhiên, điều đó thường không thấy rõ qua công việc hàng ngày của chúng ta, mà trở nên rất rõ ràng khi ta tìm hiểu các kết quả của những nhà toán học lớn, chẳng hạn khi phân tích thành tựu của các nhà toán học được Giải thưởng Fields.

Tìm hiểu những đóng góp của các nhà toán học được Giải thưởng Fields, chúng ta có dịp làm quen với hầu hết các vấn đề cơ bản nhất của toán học. Và không chỉ có thế, từ cuộc đời và sự nghiệp của họ, có thể rút ra được nhiều điều bổ ích, đặc biệt là với các bạn trẻ, những người đang có cả tương lai nghề nghiệp trước mắt mình.

LARS VALERIAN AHLFORS

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1936



Năm 1936, lần đầu tiên Hội Toán học thế giới quyết định trao Giải thưởng Fields (bốn năm một lần) cho những nhà toán học đạt thành tựu xuất sắc nhất, tuổi đời không quá 40. Lars Ahlfors có vinh dự lớn là một trong hai nhà toán học đầu tiên được trao giải thưởng cao quý đó.

Lars Ahlfors sinh ngày 18 tháng 4 năm 1907, tại thành phố Helsingfors, thời đó thuộc Đế chế Nga (nay là Helsinki, Phần Lan). Cha của Ahlfors là giáo sư về cơ học công trình ở trường đại học Bách khoa Helsinki. Mẹ ông mất ngay khi sinh ra ông. Trong những trang viết của ông về thời thơ ấu có đoạn:

Ngay từ khi còn nhỏ, tôi đã rất say mê toán học, dù chưa hiểu toán học là gì. Tuy vậy, tôi không có chút gì giống với một thần đồng. Tôi không có điều kiện tiếp xúc với tài liệu toán học cho đến những năm cuối phổ thông. Nhìn thấy nhiều thần đồng đã bị mai một vì những ông bố, bà mẹ đầy ảo tưởng, tôi càng biết ơn cha tôi vì tính nghiêm khắc của ông. Trong chương trình phổ thông hoàn toàn không có môn giải tích, nhưng tôi học được ít nhiều nhờ thỉnh thoảng thăm thư viện của cha tôi.

Ahlfors vào học tại Đại học Helsinki năm 1924, thời kỳ mà trong số các thầy giáo có Lindeloff và Nevanlinna. Ông tốt nghiệp trường Helsinki năm 1928. Trong năm học 1928-1929, Nevanlinna thay chỗ cho Weyl ở Zurich khi Weyl vắng mặt ở trường năm đó. Ahlfors theo Nevanlinna đến Zurich. Có thể nói, Ahlfors có may mắn lớn khi trong một thời gian ngắn, được học đồng thời với ba thầy giáo giỏi nhất thời đó -và có thể là của mọi thời đại- về giải tích phức, là Lindeloff, Nevanlinna và Weyl. Chính những năm từ khoảng 1925 đến 1930, Nevanlinna đã xây dựng nên một trong những lý thuyết nổi tiếng nhất của giải tích toán học, lý thuyết mang tên ông về phân phối giá trị các hàm phân hình. Lý thuyết này sau đó được Weyl, Cartan, Griffiths và một số người khác phát triển lên trường hợp chiều cao. Hướng nghiên cứu của Lars Ahlfors đã gần như được xác định vào thời kỳ đó. Tại Zurich, Nevanlinna đọc bài giảng về giả thuyết Denjoy về số giá trị tiệm cận của một hàm nguyên. Ahlfors viết một cách khiêm tốn:

Tôi đã có may mắn đặc biệt khi tìm ra một cách tiếp cận mới dựa trên ánh xạ bảo giác, và với sự giúp đỡ đáng kể của Nevanlinna và Polya, đã đưa ra chứng minh đầy đủ của giả thuyết.

Ahlfors sang Paris ba tháng cùng với Nevanlinna trước khi trở về Phần Lan nhận một chức giảng viên tại Đại học Turku. Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ năm 1930, và trong hai năm sau đó đã nhiều lần sang làm việc tại Paris và các trung tâm Toán học lớn khác ở châu Âu.

Năm 1935, Caratheodory, người mà Ahlfors đã từng gặp ở Munich, đề nghị ông nhận một ghế giáo sư ở Đại học Harvard, và Ahlfors đã đồng ý ký một hợp đồng ba năm. Năm 1936, Ahlfors trở thành một trong hai người đầu tiên được nhận Giải thưởng Fields trong Đại hội toán học thế giới ở Oslo.

Năm 1938 Ahlfors được đề nghị nhận một chức giáo sư toán học ở Đại học Helsinki, và với tình yêu quê hương sâu sắc, ông quyết định trở về Helsinki, chứ không ở lại Harvard.

Một thời kì khó khăn đang đến gần, khi mà Đại chiến thế giới thứ II sắp bùng nổ. Chiến tranh đặt ra nhiều vấn đề nghiêm trọng ở Phần Lan. Các đại học bị đóng cửa. Ahlfors cũng phải thi hành nghĩa vụ quân sự. Ông không thật thích hợp cho lắm với các nhiệm vụ quân sự, và ông vẫn tranh thủ làm toán khi đang ở trong quân ngũ! Lars Ahlfors viết về thời kì đó:

Thật là một nghịch lý, khi tôi có thể làm được rất nhiều công trình khoa học trong chiến tranh, mặc dù không có điều kiện để sử dụng các thư viện.

Gia đình Ahlfors sơ tán đến Thụy Điển trong thời gian chiến tranh, nên khi ông được đề nghị một ghế giáo sư tại Zurich (Thụy Sĩ) năm 1944 thì đó dường như là một cơ hội để ông có thể đoàn tụ với gia đình. Ông gặp gia đình tại Thụy Điển và tìm cách để đưa họ về Thụy Sĩ. Chiến tranh đã làm cho chuyến đi đến nước Thụy Sĩ đang bế quan toả cảng là không thể thực hiện được. Ông và gia đình bay từ Stockholm đến Prestwick ở Scotland vào tháng ba năm 1945. Từ Glasgow họ đi tàu đến London, rồi làm một cuộc hành trình khó khăn qua eo biển Manche để đến Pháp, và từ Paris đến Thụy Sĩ. Ông viết:

Thật lòng mà nói, tôi không thấy hạnh phúc khi sống ở Zurich. Thời kì sau chiến tranh không phải là thời kì tốt để một người nước ngoài bám rễ tại Thụy Sĩ... Vợ tôi và tôi không thấy được cảm tình, ngoài môi trường nhỏ bé của những người đồng nghiệp gần gũi.

Trong bối cảnh đó, một lời mời trở lại Harvard vào năm 1946 đã dễ dàng được chấp nhận, và Ahlfors đã ở lại Harvard cho đến khi về hưu, năm 1977.

Lĩnh vực nghiên cứu của Ahlfors trải rộng từ lý thuyết hình học bảo giác, các nhóm Klein đến ánh xạ á bảo giác. Vì thế, trong khuôn khổ một bài viết ngắn thật khó nói hết những đóng góp của ông.

Trong lời giới thiệu về các công trình của Lars Ahlfors khi ông được trao giải thưởng Fields, Caratheodory nói rằng, thật khó xác định điều gì đáng ngạc nhiên

hơn: việc Nevanlinna xây dựng lý thuyết của mình mà không cần một mô tả hình học nào, hay việc Lars Ahlfors trình bày toàn bộ lý thuyết Nevanlinna chỉ trong khoảng 40 trang, nhờ những mô tả hình học! Để hiểu rõ hơn điều đó, xin được nhắc lại đôi điều về lý thuyết Nevanlinna. Có thể nói, xuất phát điểm của lý thuyết Nevanlinna chính là Định lý cơ bản của đại số (nói rằng một đa thức bậc $n > 1$ với hệ số phức thì có đúng n nghiệm). Khi ta chuyển sang các hàm nguyên (hàm biến phức có đạo hàm tại mọi điểm của mặt phẳng phức; có thể biểu diễn bởi chuỗi lũy thừa hội tụ) hoặc hàm phân hình (là thương của hai hàm nguyên) thì điều đó được thể hiện như thế nào? Tức là làm thế nào để xác lập mối quan hệ giữa số nghiệm của phương trình $f(z) = 0$ với các tính chất của hàm số $f(z)$. Nevanlinna đã xây dựng một lý thuyết để trả lời câu hỏi đó. Lý thuyết Nevanlinna được xem là một trong những lý thuyết đẹp đẽ nhất của giải tích toán học thế kỷ 20, nó cho một công cụ mạnh để nghiên cứu các hàm nguyên và hàm phân hình. Không những



thế, gần đây, người ta phát hiện ra mối liên quan đáng ngạc nhiên giữa lý thuyết Nevanlinna và các vấn đề của số học, đặc biệt là các phương trình nghiệm nguyên và xấp xỉ Diophant. Nevanlinna xây dựng lý thuyết của mình hoàn toàn dựa vào các công cụ giải tích. Lars Ahlfors đã hình học hoá lý thuyết Nevanlinna, dội vào đó một ánh sáng mới. Thực chất của lý thuyết Nevanlinna là lượng hoá sự xấp xỉ của hàm phân hình đến một giá trị cho trước. Tương tự như trong định lý cơ bản của đại số, sự xấp xỉ này phụ thuộc vào cấp tăng của hàm phân hình. Trong các công trình của Ahlfors, cấp tăng

của hàm phân hình được diễn tả thông qua các tính chất của diện Riemann, một trong những đối tượng hình học quan trọng nhất của toán học. Nhờ các công trình của Lars Ahlfors, các mở rộng của định lý Picard, Montel được đưa về bài toán phân loại các diện Riemann. Hơn nữa, Ahlfors chứng tỏ rằng, lý thuyết Nevanlinna có thể xây dựng với những đối tượng rộng hơn, mà ông gọi là các *ánh xạ á bảo giác*. Danh từ “á bảo giác” do ông đưa ra ngày nay đã trở thành tên gọi của một lý thuyết được phát triển mạnh mẽ.

Ngoài các công trình nghiên cứu, Ahlfors còn viết nhiều cuốn sách quan trọng. Trong số đó phải kể đến *Complex analysis* (Giải tích phức, 1953), *Riemann surfaces* (Diện Riemann, cùng viết với L. Sario 1960), *Lectures on quasiconformal mappings* (Bài giảng về ánh xạ á bảo giác, 1966) và *Conformal invariants* (Bất biến bảo giác, 1973). Cuốn sách *Giải tích phức* của ông được xem là một mẫu mực của các sách giáo khoa toán học, nó vừa sáng sủa, vừa sâu sắc.

Nhờ những đóng góp của mình cho toán học, Lars Ahlfors nhận được nhiều giải thưởng cao quý. Đáng kể nhất, ngoài Giải thưởng Fields (1936) là Giải thưởng Wolf (1981), một trong những giải thưởng cao nhất của toán học (không giới hạn độ tuổi như Giải thưởng Fields).

JESSE DOUGLAS

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1936



Cùng với Ahlfors, Douglas là người có vinh dự nhận được Giải thưởng Fields đầu tiên, năm 1936. Giải thưởng cao quý đó được trao cho ông vì lời giải trọn vẹn của Bài toán Plateau (bài toán đặt ra lần đầu tiên năm 1760).

Để hiểu được bài toán Plateau, bạn có thể làm “thí nghiệm” đơn giản sau đây. Trước hết, lấy một cái dây thép và uốn nó thành một vòng khép kín (không nhất thiết phải phẳng, tức là có thể không đặt nằm khít được lên tờ giấy). Nhúng vòng dây đó vào một dung dịch nước xà phòng đặc và nhẹ nhàng kéo lên. Khi đó bạn sẽ được một màng xà phòng căng trên vòng dây thép. Đã bao giờ bạn tự đặt ra câu hỏi sau : *tại sao cái màng xà phòng phải có đúng hình dạng như thế mà không phải là hình khác?* Có thể dự đoán được, đó chính là màng với diện tích bé nhất căng trên vòng dây. Điều này cũng dễ hiểu, bởi vì thiên nhiên bao giờ cũng làm các việc theo quy tắc “tiết kiệm nhất”. Và như vậy, bạn đã “chứng minh” được rằng, với một đường khép kín (chu tuyến), luôn tồn tại một mặt nhận đường đó làm biên, với diện tích bé nhất. Tuy nhiên, đó chưa phải là một chứng minh toán học! Bài toán “bong bóng xà phòng” (đúng hơn là bài toán tồn tại mặt với diện tích cực tiểu, giới hạn bởi chu tuyến cho trước) được Lagrange đặt ra năm 1870. Bài toán đó, nổi tiếng với tên gọi *Bài toán Plateau* (theo tên của nhà vật lý thực nghiệm thế kỷ 19, Joseph Plateau), đã thu hút những tên tuổi lớn nhất của toán học, như Riemann, Weierstrass và Schwarz. Tuy nhiên, trước Douglas, người ta chỉ mới biết đến những lời giải cho một số trường hợp đặc biệt. Năm 1931, Douglas đã cho lời giải của bài toán Plateau trong trường hợp tổng quát nhất, được trình bày trong bài “Lời giải của bài toán Plateau” (Tập chí *Transactions of the American Mathematical Society*, 1931, N. 1, tr. 263-321). Điều đáng ngạc nhiên là phương pháp chứng minh của Douglas hết sức đơn giản, người đọc có thể hiểu hoàn toàn qua bài báo dày 28 trang đó của ông mà không đòi hỏi biết nhiều kiến thức. Ngay cả khi áp dụng cho những trường hợp đã biết trước đây, phương pháp của Douglas vẫn đơn giản hơn nhiều. Thực ra, Douglas đã hoàn thành công trình trước đó nhiều năm, vào khoảng năm 1926, nhưng ông rất thận trọng trước khi công bố kết quả của mình. Trong bài báo của ông có chú thích: từng phần của công trình đã được trình bày nhiều lần tại các phiên họp của Hội toán học Mỹ, từ tháng 12 năm 1926 đến tháng 12 năm 1929. Tóm tắt của công trình đã được in trong các số của tờ Thông tin Hội toán học Mỹ các năm 1927, 1928, 1929, 1930. Công trình cũng đã được trình bày tại xêmina của Hadamard ở Paris (18 tháng 1 và 17 tháng 2 năm 1929), xêmina của Courant và Herglotz ở Göttingen (ngày 4, 11, 18 tháng 6 năm 1929), xêmina của Blaschke ở Hamburg (26 tháng 7 năm 1929). Sau công trình đó, ông còn giải quyết được cả trường hợp chu tuyến đã cho có điểm tự cắt (như khi làm vòng giấy thép, ta xoắn nó lại). Với những kết quả trọn vẹn và đẹp đẽ này, ông được trao giải thưởng Fields năm 1936. Đến thời điểm đó,

ông mới công bố 8 bài báo (chưa đủ “điểm” để xét phong Phó giáo sư theo “tiêu chuẩn Việt Nam” hiện nay! Và trong cả cuộc đời làm toán của mình, Douglas cũng chỉ công bố tổng cộng 33 công trình).

Jesse Douglas sinh ngày 3 tháng 7 năm 1897 ở New York. Ông đã thực sự bị lôi cuốn bởi môn Hình học khi nghiên cứu Bài toán Plateau. Ông nghiên cứu hình học vi phân tại trường Colombia từ năm 1920 đến năm 1926. Sau đó, từ 1926 đến 1930 ông đến thăm và làm việc tại Princeton, Harvard, Chicago, Paris và Gottingen.

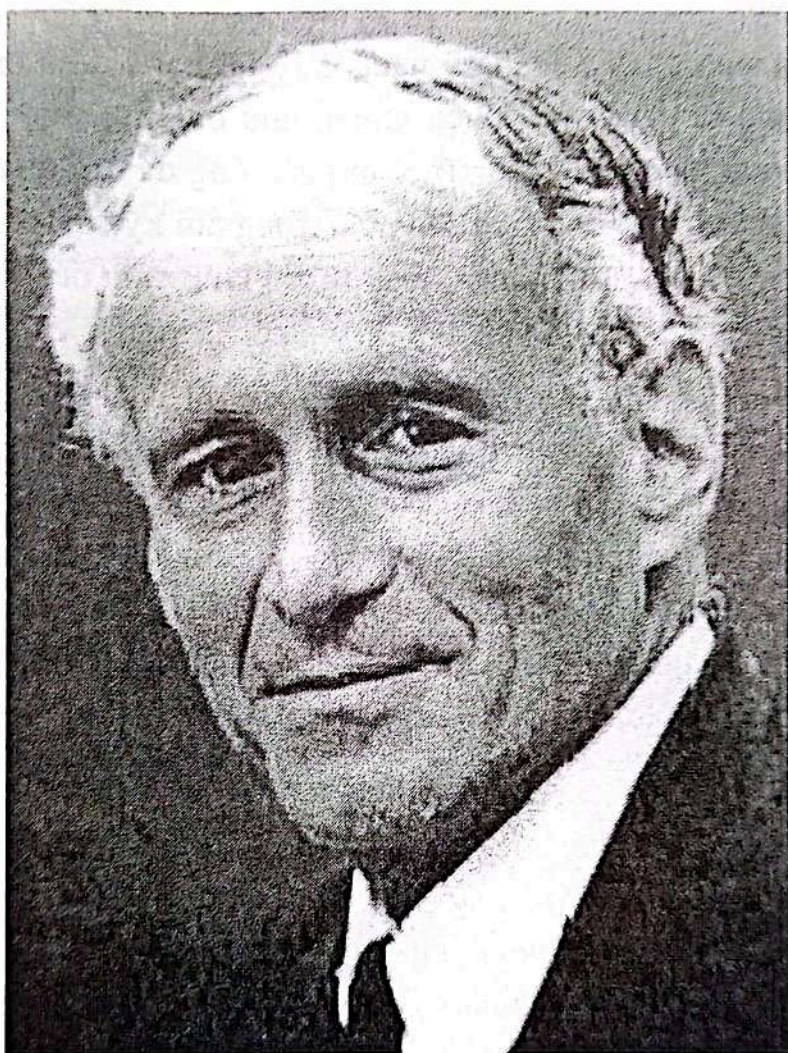
Năm 1943 Douglas được trao Giải thưởng Bocher của Hội toán học Hoa Kỳ nhờ những công trình của ông về bài toán Plateau, đặc biệt nhờ ba bài báo công bố trong năm 1939: *Green's function and the problem of Plateau* (Hàm Green và bài toán Plateau) đăng trong tờ *American Journal of Mathematics* (tạp chí toán học Mỹ), *The most general form of the problem of Plateau* (Dạng tổng quát nhất của bài toán Plateau) đăng trong *American Journal of Mathematics*, và *Solution of the inverse problem of the calculus of variations* (Lời giải của bài toán ngược của phép tính biến phân) đăng trong *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Kỷ yếu Viện hàn lâm khoa học quốc gia).

Sau các công trình kể trên về bài toán Plateau, Douglas làm việc trong lĩnh vực phép tính biến phân, và lý thuyết các nhóm abel hữu hạn sinh. Đặc biệt, ông có nhiều kết quả quan trọng trong bài toán các nhóm với hai phần tử sinh x, y sao cho mỗi phần tử có thể biểu diễn dưới dạng $x^m y^n$ với m, n là những số nguyên.

Jesse Douglas mất ngày 7 tháng 10 năm 1965, tại New York.

LAURENT SCHWARTZ

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1950



"Tôi là nhà toán học. Toán học đầy ắp cuộc đời tôi". Laurent Schwartz viết như vậy trong lời mở đầu cuốn hồi ký của ông. Ông cũng nói rằng, ngoài toán học, ông giành rất nhiều thời gian của đời mình cho cuộc đấu tranh vì quyền con người, vì quyền của các dân tộc, ban đầu thì như một người Troskit, sau đó thì đứng ngoài tất cả các đảng phái! Việt Nam chiếm một vị trí quan trọng trong các hoạt động đó của ông. Trong nhiều năm, ông luôn đứng hàng đầu trong đội ngũ những trí thức lớn của phương Tây đấu tranh ủng hộ cuộc kháng chiến của nhân dân Việt Nam. Trong cuốn hồi ký dày 500 trang của ông, có thể tìm thấy khoảng 100 trang có nhắc đến Việt Nam.

Laurent Schwartz sinh ngày 5 tháng 3 năm 1915 tại Paris. Cha ông là một bác sĩ phẫu thuật, mẹ ông là người yêu thiên nhiên, như ông nói, suốt ngày chỉ quanh quẩn với mảnh vườn và ba đứa con. Tuổi thơ của ông đã trôi qua êm đềm ở làng quê Autouillet, mà ông gọi một cách trìu mến trong hồi ký của mình là *"Khu vườn Eden"*. Mãi sau này, ông vẫn thường xuyên trở về khu vườn đó, và như ông kể lại, những định lý hay nhất của ông được tìm thấy tại *"khu vườn Eden"*.

Ngay từ khi còn nhỏ, Laurent Schwartz đã bộc lộ thiên hướng nghiên cứu. Nếu như hầu hết trẻ em hài lòng với những lời giải thích sơ lược của bố mẹ khi chúng hỏi *"tại sao"*, thì cậu bé Laurent không như vậy. Cậu luôn đòi hỏi những lời giải thích cặn kẽ, mà ít khi được thoả mãn. Mẹ cậu rất lúng túng trước những câu hỏi: tại sao khi cắm cái gậy vào nước thì thấy nó cong, tại sao trong cùng một nhiệt độ mà không khí lúc thì lạnh hơn, lúc thì nóng hơn nước, tại sao khi lật úp cái thìa cà phê thì không bao giờ hết cà phê, mà còn một ít dính lại ở thìa,...

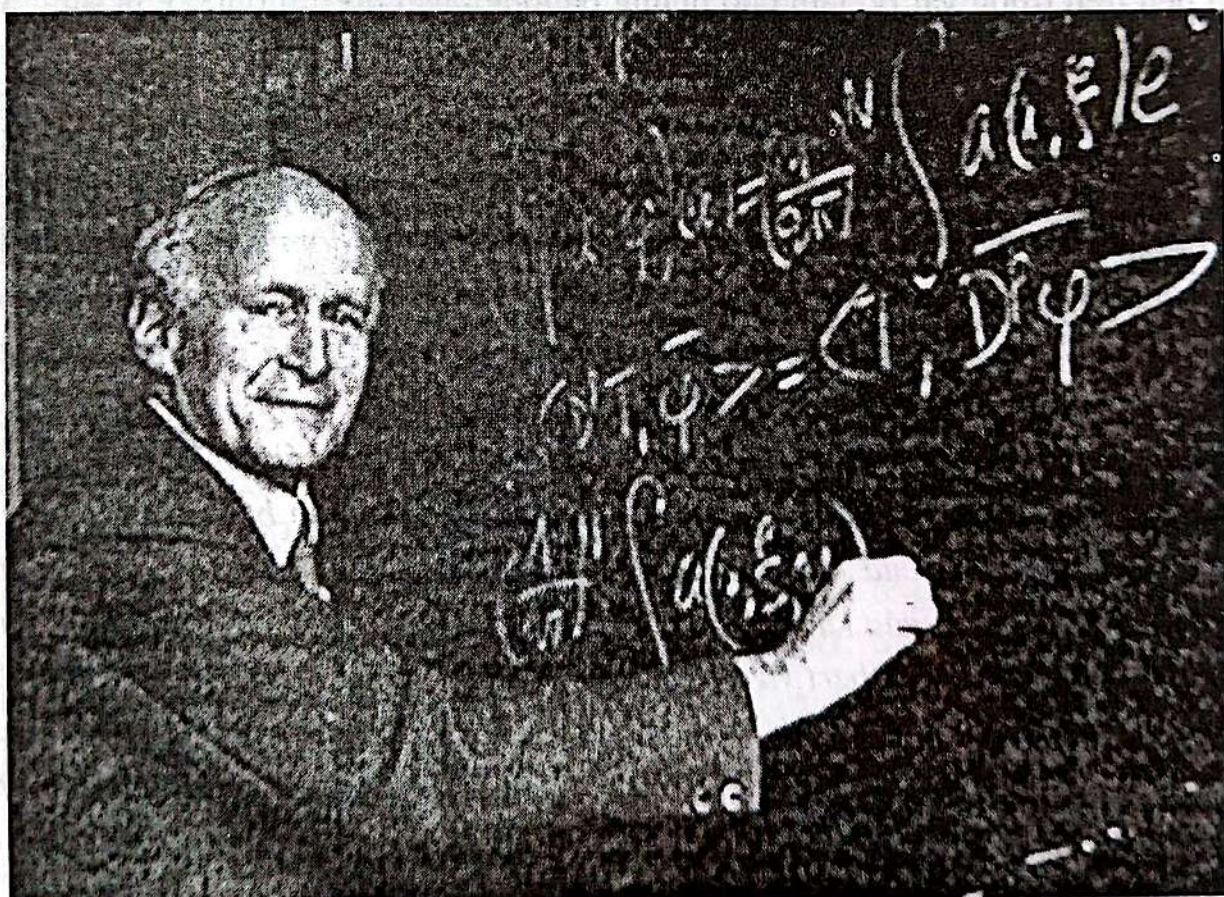
Ở các lớp tiểu học, Laurent Schwartz không phải là học sinh giỏi môn toán. Ông rất nhớ lời thầy Thoridenet, người dạy ông môn văn năm lớp 5 nói với mẹ ông: *"Tôi chưa có học sinh nào giỏi như vậy về môn tiếng Latinh, nhưng về tiếng Pháp, ngôn ngữ và toán thì cậu ta kém hơn một chút. Tuy vậy, cho dù người ta nói với bà thế nào đi nữa, cậu ta sẽ trở thành nhà toán học!"*. Laurent Schwartz nói rằng, nếu không có lời khuyên của ông thầy dạy văn đó thì có lẽ ông đã trở thành nhà ngôn ngữ học, chứ không phải nhà toán học! May mắn nữa cho Laurent là cậu gặp một thầy giáo dạy toán đầy nhiệt tâm, thầy Julien. Ông đã giải thích cho học sinh một cách rất vui vẻ và đơn giản những điều kì diệu của môn Hình học, mở ra cho họ một thế giới toán học mà trước đó họ chưa được biết đến. Laurent Schwartz kể lại rằng, sau khi suy nghĩ vài ba tuần, ông quyết định *trở thành nhà toán học*. Theo ông, thiên hướng đó có sẵn trong con người ông, nhưng đã trở thành hiện thực nhờ

thầy giáo. Vì thế ông cho rằng, vai trò của người thầy đối với tương lai học sinh là có ý nghĩa quyết định.

Laurent Schwartz thi đỗ vào trường Ecole Normale Supérieure (Paris) năm 1934. Ở Ecole Normale, ông được học với những giáo sư nổi tiếng nhất thời bấy giờ: Fréchet, Montel, Borel, Denjoy, Julia, Elie Cartan, Lebesgue và Hadamard. Trong khoá đó, ông cùng với Choquet, Marot là ba người xuất sắc nhất.

Tốt nghiệp Ecole Normale năm 1937, ông làm nghiên cứu sinh tại trường đại học Strasbourg, bảo vệ luận án Tiến sĩ năm 1943. Giáo sư hướng dẫn luận án của ông là Valiron, một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó về lý thuyết hàm. Vài năm sau, Valiron cũng là người hướng dẫn của giáo sư Lê Văn Thiêm.

Trong các năm 1944-1945 ông giảng dạy tại khoa Khoa học ở Grenoble, sau đó chuyển về Nancy, nhận một chức giáo sư ở khoa Khoa học. Chính trong thời gian này, ông sáng tạo ra công trình nổi tiếng về lý thuyết các hàm suy rộng.



Năm 1953 Laurent Schwartz trở về Paris, làm giáo sư cho đến 1959. Ông giảng dạy tại trường Ecole Polytechnique từ 1959 đến 1980, rồi làm việc ở Đại học Paris 7 ba năm, cho đến ngày nghỉ hưu năm 1983.

Cống hiến lớn nhất cho toán học của Laurent Schwartz là các công trình của ông về lý thuyết phân bố, được viết vào khoảng những năm 40. Những tư tưởng của ông theo hướng này được trình bày lần đầu tiên năm 1948 trong bài *"Mở rộng khái niệm hàm, đạo hàm, biến đổi Fourier và các ứng dụng toán học, vật lý"*.

Lý thuyết phân bố là sự mở rộng đáng kể phép tính tích phân và vi phân. Do những nhu cầu của Vật lý học, Heaviside và Dirac đã mở rộng phép tính với những ứng dụng đặc biệt. Tuy nhiên, các phương pháp của họ, cũng như những phương pháp tương tự về các phép tính hình thức không được xây dựng trên một nền tảng toán học chặt chẽ. Để những nghiên cứu của họ có thể trở thành một lý thuyết mới thực sự của vật lý học, cần trang bị cho nó một cơ sở toán học vững chắc. Chính Dirac đã có lần nói: *Khi bạn định xây dựng một lý thuyết mới nào trong vật lý, cái duy nhất mà bạn có thể tin tưởng là toán học.*

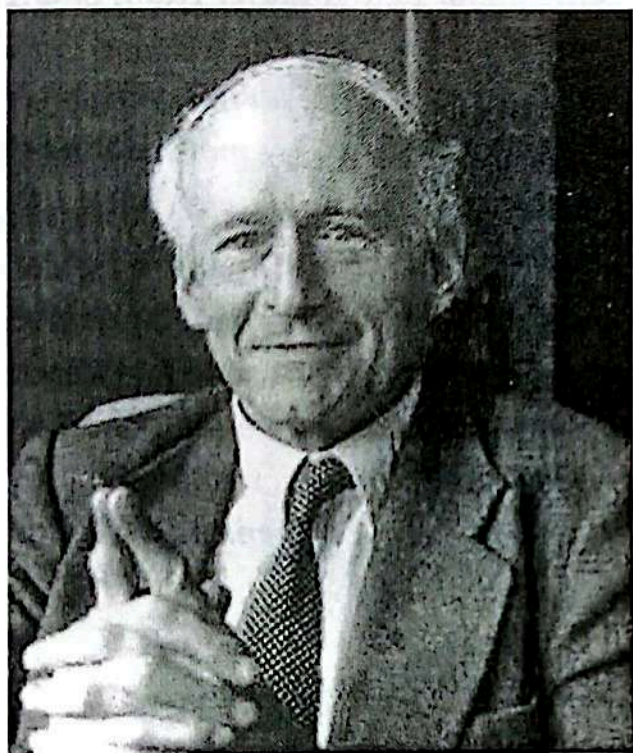
Laurent Schwartz đã phát triển một lý thuyết làm cơ sở cho các phương pháp tính toán nêu trên trong vật lý, làm cho những phương pháp đó tìm được ứng dụng hết sức rộng rãi trong những lĩnh vực khác nhau.

Francois Treves đã nói về công trình của Laurent Schwartz như sau:

Tư tưởng của Laurent Schwartz đã cho một cách lý giải thống nhất tất cả các hàm suy rộng thâm nhập trong giải tích như là những phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian các hàm khả vi vô hạn triệt tiêu ngoài một tập compact. Ông đã cho một cách mô tả có hệ thống và chặt chẽ, hoàn toàn dựa trên giải tích hàm trừu tượng và lý thuyết đối ngẫu. Cũng cần nhắc lại rằng, một cách lý giải như vậy đã có trước đây trong công trình của André Weil về tích phân các nhóm compact địa phương... Do sự đòi hỏi của tính khả vi trong lý thuyết phân bố, không gian các hàm thử và đối ngẫu của chúng đôi khi rất phức tạp. Điều này dẫn đến những nghiên cứu sôi nổi về các không gian vectơ tôpô không thuộc các phạm trù quen thuộc như không gian Hilbert và không gian Banach. Những nghiên cứu này, đến lượt mình, chiếu rọi những ánh sáng mới lên nhiều lĩnh vực của Giải tích thuần túy, như Phương trình đạo hàm riêng, hoặc Hàm số biến số phức. Những tư tưởng của Laurent Schwartz có thể áp dụng cho nhiều không gian hàm thử khác nhau, như chính ông và nhiều người khác đã chỉ rõ...

Herald Bohr, người giới thiệu công trình của Laurent Schwartz trong buổi trao Giải thưởng Fields ngày 30 tháng 8 năm 1950 tại Harvard đã mô tả các công trình của Laurent Schwartz viết năm 1948 như sau:

Chúng chắc chắn sẽ trở thành những công trình kinh điển của toán học thời đại chúng ta... Tôi nghĩ rằng, những người trích dẫn công trình của ông, cũng giống như tôi, sẽ phải kìm nén một niềm phấn khích để chịu, để nhìn thấy sự hài hoà tuyệt vời của một cấu trúc tính toán mà lý thuyết này dẫn chúng ta đến, và để hiểu tầm quan trọng và ưu việt của chúng đối với nhiều phân của giải tích cao cấp, như Lý thuyết phổ, Lý thuyết thế vị, và toàn bộ Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng.



Ngoài Giải thưởng Fields, Laurent Schwartz còn nhận được giải thưởng của Viện hàn lâm khoa học Paris các năm 1955, 1964, 1972. Năm 1972 ông được bầu là Viện sĩ Viện hàn lâm Pháp. Ông được phong tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học, trong đó có Humboldt (1960), Brussels (1962), Lund (1981), Tel-Aviv (1981), Montreal (1985) và Athens (1993).

Không chỉ là nhà toán học nổi tiếng, Laurent Schwartz còn được biết đến như là một trong những trí thức lớn suốt đời đấu tranh vì tự do của các dân tộc. Laurent Schwartz nói rằng, những năm ở

Ecole Normale đã xác định hoàn toàn khuynh hướng chính trị của ông: chống chiến tranh và bảo vệ những giá trị của con người. Cuốn sách "Đông Dương cấp cứu" (*Indochine SOS*) của Andrée Viollis đã cho ông thấy rõ tội ác của chủ nghĩa thực dân Pháp ở Đông Dương. Quan điểm chính trị của ông thể hiện rõ nhất trong phong trào chống chiến tranh xâm lược của đế quốc Mỹ ở Việt Nam. Ông đề xướng khẩu hiệu "Mặt trận dân tộc giải phóng sẽ chiến thắng" thay cho khẩu hiệu mà ông cho là mơ hồ của phong trào chống chiến tranh Việt Nam ở Pháp thời đó "Hoà bình ở Việt Nam". Hoạt động của Ủy ban quốc gia Việt Nam do ông sáng lập đã gây được tiếng vang lớn. Ông hết sức tự hào khi vào khoảng lễ Noel năm 1966, nhận được bức điện cảm ơn và chúc mừng của Chủ tịch Hồ Chí Minh. Ông đến Việt Nam nhiều lần trong thời kì còn chiến tranh, với tư cách là thành viên trong Tòa án quốc tế xét xử tội ác chiến tranh của Mỹ ở Việt Nam (một tổ chức quốc tế do nhà toán học, nhà triết học nổi tiếng người Anh, Giải thưởng Nobel về văn học năm 1950, huân tước Bertrand Russell sáng lập). Những chuyến đi về các

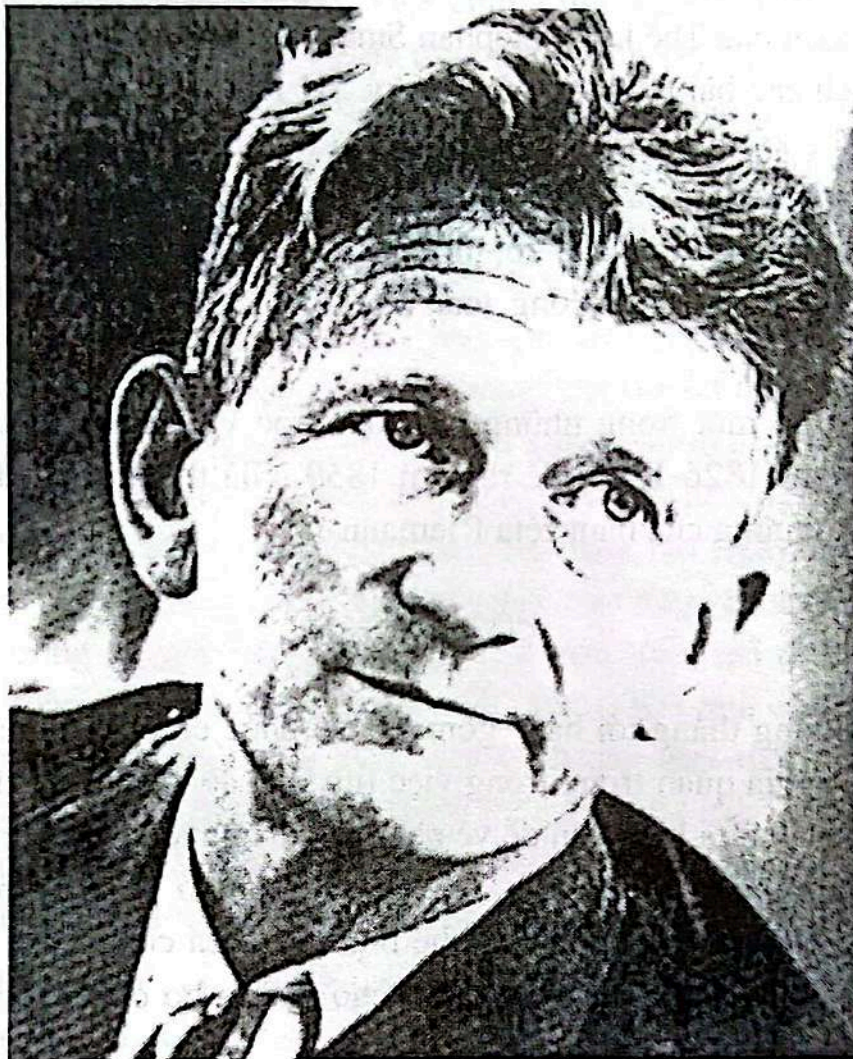
làng quê Việt Nam đã làm cho ông thấy yêu mến đặc biệt đất nước và con người Việt Nam. Không gì có thể nói đầy đủ hơn tình cảm của ông với Việt Nam bằng chính những lời ông viết trong hồi ký của mình:

Việt Nam đã ghi dấu ấn trong cuộc đời tôi. Tôi từng biết đến Đông Dương thuộc địa, qua cuốn sách của André Viollis viết năm 1931, mà tôi đọc năm 1935. Lúc đó tôi vừa tròn 20 tuổi. Cuộc đấu tranh của tôi cho tự do của đất nước này là cuộc đấu tranh dài nhất của cuộc đời tôi. Tôi đã yêu, và mãi mãi yêu Việt Nam, những phong cảnh, những con người tuyệt vời, những chiếc xe đạp. Trong tôi, có một chút nào đó là người Việt Nam. Gặp người Việt Nam, nghe tiếng họ nói chuyện với nhau trong xe buýt (mà tất nhiên là tôi không hiểu), tôi cảm thấy một niềm hạnh phúc không cắt nghĩa được. Sợi dây tình cảm đã nối liền tôi với đất nước này.

Năm 1998, khi Viện Toán học tổ chức Hội nghị quốc tế nhân 80 năm ngày sinh của Giáo sư Lê Văn Thiêm, Laurent Schwartz rất xúc động thông báo cho Ban tổ chức rằng ông rất muốn sang Việt Nam một lần nữa, nhưng tiếc là sức khỏe không cho phép. Khi ông qua đời năm 2002, tờ *Thông tin toán học* của Hội toán học Việt Nam có đăng một bài viết để tưởng nhớ ông. Dường như ông biết trước điều đó, nên đã viết trong hồi ký của mình: "*Les Vietnamiens ne m'oublient pas*" (Người Việt Nam không quên tôi).

ATLE SELBERG

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1950



Tại Đại hội toán học thế giới đầu tiên sau chiến tranh họp ở Harvard năm 1950, Selberg được trao Giải thưởng Fields nhờ những kết quả xuất sắc liên quan đến giả thuyết nổi tiếng về các không điểm của hàm zeta Riemann. Cũng cần nói ngay rằng, đó là một trong những giả thuyết khó nhất của toán học, và cho đến tận ngày hôm nay vẫn còn chưa được giải quyết trọn vẹn. Năm 1900, Hilbert xếp giả thuyết này vào một trong những bài toán lớn của toán học thế kỷ 20. Năm 2000, Viện Clay treo giải thưởng một triệu đô la Mỹ cho ai giải được giả thuyết đó (là một trong “Bảy bài toán của Thế kỷ”), Stephan Smale (Giải thưởng Fields 1964) lại xếp nó vào danh sách các bài toán lớn của thế kỷ 21! Không biết đó sẽ là bài toán lớn của bao nhiêu thế kỷ nữa, bởi vì Hilbert đã có lần nói : “*Nếu sau đây 1000 năm mà tôi sống lại, thì câu hỏi đầu tiên của tôi sẽ là: Giả thuyết Riemann đã giải được chưa?*”. Do tính chất đặc biệt của nó, mỗi đóng góp quan trọng vào việc giải quyết giả thuyết đó đều được cộng đồng toán học đánh giá rất cao. Vậy, giả thuyết Riemann là gì?

Đó là giả thuyết do một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của mọi thời đại, Bernhard Riemann (1826-1886) đề ra năm 1859. Giả thuyết nói rằng, các không điểm không tầm thường của hàm zeta Riemann

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

đều nằm trên “đường thẳng tới hạn” gồm các số phức có phần thực bằng $1/2$. Giả thuyết này có ý nghĩa quan trọng trong việc tìm một công thức để tính sự phân bố các số nguyên tố. Như ta biết, vấn đề về phân bố số nguyên tố là vấn đề được quan tâm từ nhiều thế kỷ nay, và gần đây, bài toán đó còn có ý nghĩa trong ứng dụng, chẳng hạn trong bài toán xây dựng các hệ mật mã khoá công khai. Từ khi ra đời, giả thuyết Riemann luôn là thách thức lớn cho những bộ óc xuất chúng nhất của toán học.

Năm 1914, Hardy chứng minh rằng, có vô hạn không điểm của hàm zeta Riemann nằm trên đường thẳng tới hạn.

Năm 1942, với việc mở rộng “phương pháp sàng” của Viggo Brun, Selberg đã thu được những kết quả đi xa hơn nhiều so với kết quả của Hardy, bằng cách cho một ước lượng về cấp tăng của số các không điểm của hàm zeta Riemann trên đường thẳng tới hạn, khi phần ảo tiến ra vô cùng. Đây là một bước tiến quan trọng, vì không những chỉ ra có vô hạn không điểm trên đường thẳng tới hạn, nó còn cho một kết quả định lượng.

André Weil chứng minh giả thuyết Riemann cho trường hàm (1948). Năm 1974, Levin chỉ ra rằng có ít nhất $1/3$ số không điểm của hàm zeta Riemann nằm trên đường thẳng tới hạn. Kết quả này được Vardi (1991) làm tốt hơn bằng cách chứng minh số đó ít nhất là 40%.

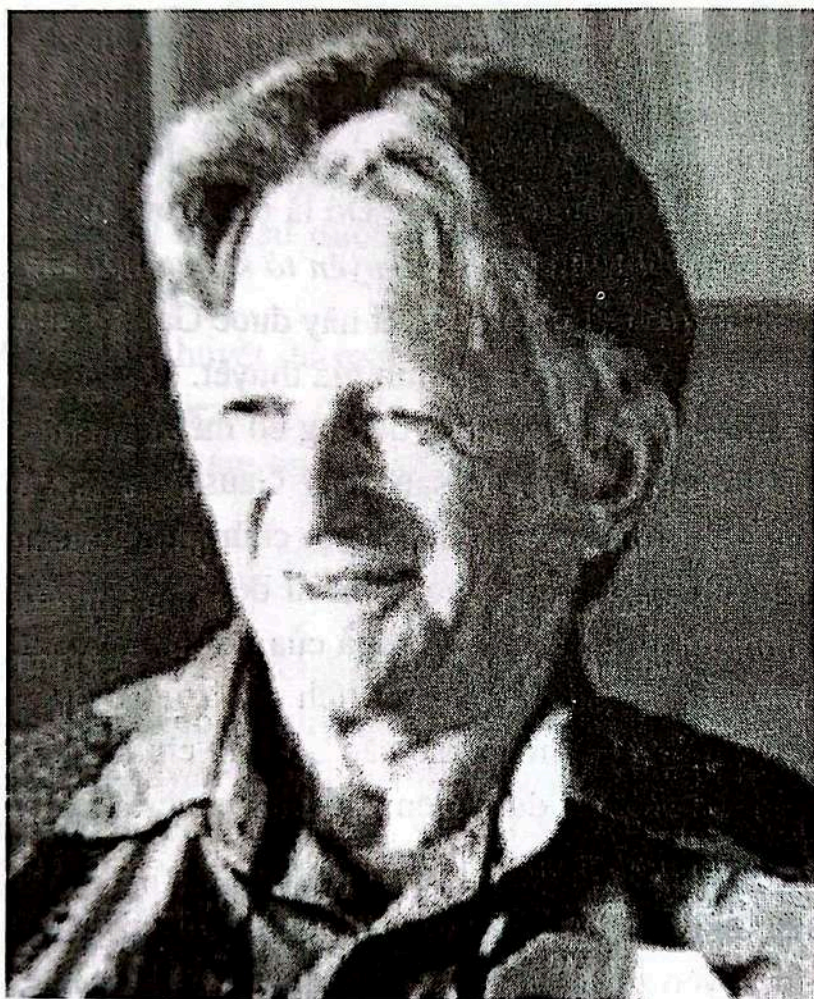
Với cố gắng của nhiều thế hệ các nhà toán học hàng đầu, lĩnh vực nghiên cứu giả thuyết Riemann đã có những bước tiến đáng kể, mặc dầu vậy, bài toán đó vẫn đang là thách thức lớn của toán học. Việc chứng minh giả thuyết đó không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn mang ý nghĩa thực tiễn. Trên chặng đường dài, mà có lẽ còn lâu mới kết thúc được, Selberg đã đặt một cột mốc quan trọng, và nhờ nó ông được trao giải thưởng Fields năm 1950 (cùng với Laurent Schwartz).

Ngoài kết quả về giả thuyết Riemann, Selberg còn cho một chứng minh “sơ cấp” (không sử dụng hàm biến phức) của Định lý số nguyên tố. Đó là một trong những định lý nổi tiếng nhất của toán học, nói rằng *số các số nguyên tố không vượt quá n có cấp tăng như $n / \ln n$* , khi n tiến ra vô cùng. Giả thuyết này được Gauss đặt ra vào năm 1793, và Riemann đã gần như đi đến chứng minh giả thuyết. Tuy nhiên, các kết quả về giải tích phức của thời Riemann chưa đủ để ông có thể hoàn thiện chứng minh. Phải đợi đến năm 1896, một trăm năm sau ngày Gauss đưa ra giả thuyết, Hadamard và De La Valée Poussin mới cho được một chứng minh hoàn chỉnh dựa trên công cụ giải tích phức (hai nhà toán học trên đi đến chứng minh một cách hoàn toàn độc lập, và cùng một thời gian). Kết quả của họ được xem là một trong những thành tựu vĩ đại nhất của lý thuyết giải tích các số. Tuy vậy, người ta vẫn mong muốn tìm kiếm một chứng minh “sơ cấp”, tức là chỉ sử dụng các công cụ của lý thuyết số sơ cấp, mà không dùng đến giải tích phức. Điều đó chỉ đạt được sau hơn nửa thế kỷ, với công trình của Selberg.

Selberg cũng đồng thời là người đưa ra chứng minh sơ cấp của định lý Dirichlet nổi tiếng về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố trong một cấp số cộng nguyên thủy (cấp số cộng mà số hạng đầu tiên và công sai là hai số nguyên tố cùng nhau). Chứng minh của Selberg được trình bày trong 3 bài báo đăng trên tờ *Annals of Mathematics* năm 1950, khoảng 100 năm sau chứng minh dựa vào giải tích phức của Dirichlet.

Dường như Selberg sinh ra là để giải quyết những bài toán khó tồn đọng của hàng chục, thậm chí hàng trăm năm! Tuy vậy, khi nhìn lại các công trình của Selberg, người ta cho rằng công trình về giả thuyết Riemann, mặc dù mang lại cho ông Giải thưởng Fields, vẫn chưa phải là công trình quan trọng nhất của ông!

Có lẽ, công trình quan trọng nhất của Selberg chính là công trình về “công thức vết của $SL_2(\mathbb{R})$ ”, được viết một năm sau khi ông nhận Giải thưởng Fields. Với công thức này, ông đã xây dựng một đối tượng toán học mà ngày nay được gọi là “hàm zeta Selberg” đối với các diện Riemann. Hàm này cũng thoả mãn nhiều tính chất tương tự như giả thuyết Riemann. Tên tuổi của Selberg được gắn với nhiều khái niệm quan trọng của toán học: phương pháp Rankin-Selberg, sàng Selberg, công thức vết Selberg, hàm zeta Selberg,...



Atle Selberg sinh ngày 14 tháng 6 năm 1917 ở Langesund, Na Uy. Ông say mê toán học từ nhỏ. Đặc biệt, ông bị lôi cuốn vì những công trình khoa học cũng như cuộc đời kì lạ của nhà toán học Ấn Độ Ramanujan, người mà tạp chí *Times* bình chọn là *nhà toán học kì lạ nhất của thế kỷ 20*². Tuyển tập công trình của Ramanujan đã đưa ông vào thế giới toán học, nhất là số học. Năm 1989 Selberg xuất bản cuốn *Những suy nghĩ nhân kỷ niệm 100 năm Ramanujan*, ghi lại bài phát biểu của ông trong *Hội nghị 100 năm Ramanujan* tổ chức

tháng Giêng năm 1988 tại Viện Tata ở Bombay. Trong bài phát biểu đó, ông nói

² Ramanujan thuở nhỏ sống trong một ngôi chùa. Ông không hề được học toán, mà chỉ ngẫu nhiên có được cuốn *Cẩm nang toán học*, với các định lý không chứng minh. Ramanujan đã tự mình chứng minh lại toàn bộ 6000 định lý trong cuốn sách, và để làm việc đó, ông phải tự mình xây dựng lại lý thuyết! Hardy là người phát hiện ra thiên tài của Ramanujan, và đưa ông sang nước Anh. Ramanujan để lại nhiều kết quả độc đáo, và rất nhiều định lý chưa được chứng minh. Ông mất năm 32 tuổi vì bệnh lao phổi.

về những ảnh hưởng quan trọng của Ramanujan đến mối quan tâm và những công trình của ông trong toán học.

Hướng đi của Selberg trong toán học cũng chịu ảnh hưởng nhiều bởi bài giảng của nhà toán học Đức Hecke năm 1936 tại Đại hội toán học thế giới ở Oslo. Hecke là người có những đóng góp to lớn trong lý thuyết các dạng môđula và hàm tự đẳng cấu, lĩnh vực mà về sau, Selberg có những công trình quan trọng nhất của mình.

Selberg làm nghiên cứu sinh tại Đại học Oslo, và nhận bằng tiến sĩ ở đó năm 1943. Ông cũng làm giảng viên tại trường từ năm 1942 đến 1947, rồi sang Mỹ cùng với vợ.

Ở Mỹ, Selberg làm việc một năm tại Viện nghiên cứu cao cấp Princeton, sau đó làm phó giáo sư tại đại học Syracuse một năm. Nhờ những đóng góp xuất sắc của mình, ông được nhận trở về Princeton như một thành viên chính thức của Viện. Năm 1951, ông nhận ghế Giáo sư của Đại học Princeton.

Trong các năm 1989, 1991, tuyển tập công trình của Selberg được xuất bản làm hai tập. Người ta nói rằng, *tuyển tập công trình* của ông được đọc giả nồng nhiệt đón nhận vì nhiều lý do. Trước hết, ông là nhà toán học “kinh điển” còn sống, người đã có ảnh hưởng sâu sắc đến toán học, đặc biệt là lý thuyết giải tích các số theo nghĩa rộng nhất của từ này. Thứ hai, các công trình của ông cho đến 1947 phần lớn công bố ở Na Uy (một phần do chiến tranh), bây giờ đã có thể dễ dàng tìm đọc. Thứ ba, nhiều lý thuyết toán học đẹp đẽ đã ra đời nhờ những công trình của Selberg trong tuyển tập.

Bên cạnh Giải thưởng Fields, Selberg còn nhận được nhiều vinh dự khác: ông được bầu là Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Na Uy, Viện hàn lâm khoa học và văn học Hoàng gia Đan Mạch, Viện hàn lâm khoa học và nghệ thuật Hoa Kỳ.

KUNIHICO KODAIRA

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1954



Kodaira là nhà toán học đầu tiên không thuộc Châu Âu và Bắc Mỹ nhận được Giải thưởng Fields.

Ông sinh ngày 16 tháng 3 năm 1915 ở Tokyo, là con cả của ông Gonichi Kodaira và bà Ichi Kanai. Ông Gonichi Kodaira là Thứ trưởng Bộ Nông - Lâm nghiệp trong chính phủ Nhật Bản, đồng thời là một nhà khoa học. Bà Ichi cũng là con một gia đình danh giá theo đạo Thiên Chúa. Từ nhỏ, Kodaira đã được học đàn piano, sau đó là violon, và là một người chơi piano rất giỏi. Chính trong những cuộc hoà nhạc do bạn bè tổ chức, Kodaira làm quen với Seiko, em gái của giáo sư toán học Iyanaga, và họ kết hôn năm 1943.

Trong tiểu sử tự thuật của mình, Kodaira viết rằng, ở trường tiểu học và trung học, ông chỉ giỏi toán, các môn khác đều bình thường. Tuy vậy người ta cho là ông quá khiêm tốn, vì ông tốt nghiệp loại xuất sắc của trường. Với vóc dáng nhỏ bé, Kodaira vốn nổi tiếng là người rụt rè.

Kodaira thích môn số học từ nhỏ, và ngay khi là học sinh trung học, ông đã đọc cuốn *Đại số* của Fujiwara, cuốn giáo trình dành cho sinh viên. Ông đã từng mơ ước trở thành thầy giáo môn toán ở trung học.

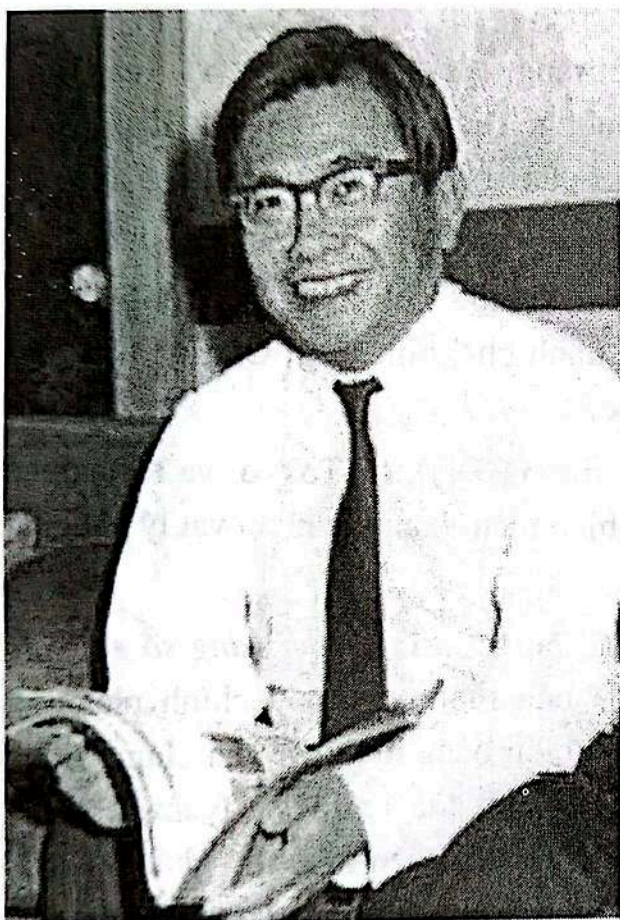
Năm 1935 Kodaira vào học tại khoa Toán trường Đại học Tokyo, và tốt nghiệp năm 1938. Sau đó, năm 1941, ông lại tốt nghiệp thêm bằng cử nhân vật lý cũng tại trường Tokyo.

Giáo sư Iyanaga kể lại rằng, khi ông cho bài tập : *Chứng minh rằng số e không phải là số vô tỷ bậc 2* (không phải là căn của một số không chính phương), Kodaira (khi đó là sinh viên năm thứ nhất) đã lên bảng ngay và viết chứng minh trong ít dòng, không nói một lời. Khi đọc lại lời giải của sinh viên, Iyanaga đã hết sức ngạc nhiên về chứng minh hoàn hảo của cậu sinh viên năm thứ nhất. Về sau, ông cũng nghe nói rằng, với các bài giảng của Kodaira ở Princeton và các đại học khác tại Mỹ, sinh viên thích "nhìn" hơn là nghe, vì ông nói nhỏ và quá ít, nhưng lại viết rất rõ ràng.

Kodaira bắt đầu công bố các công trình nghiên cứu từ năm 1937, khi ông còn là sinh viên, và sau đó vẫn đều đặn có các công trình nghiên cứu mới. Tuy nhiên, cuộc đại chiến thế giới thứ hai đã làm thay đổi tất cả. Ông viết: *"Tôi vẫn nghĩ rằng tôi sẽ mãi mãi sống ở Nhật Bản, làm Toán và chơi nhạc. Nhưng ý định đó đã bị chiến tranh đảo lộn hoàn toàn"* .

Tình hình ở Nhật Bản ngày càng trở nên tồi tệ, và kể từ năm 1944-1945, khó mà sống được ở Tokyo. Chính phủ khuyến khích các đại học tìm chỗ sơ tán về nông thôn, tuy nhiên điều đó cũng không dễ dàng, vì những người ở nông thôn không muốn đón nhận một số lượng lớn người đổ dồn về từ thành phố. Khoa Toán - Lý của đại học Tokyo, nhờ vào ảnh hưởng của ông thân sinh của Kodaira, tìm được chỗ sơ tán ở vùng Suwa, quê của bà Ichi Kodaira.

Chiến tranh kết thúc, ngôi nhà của ông bà Kodaira ở Tokyo bị phá huỷ hoàn toàn. Đứa con trai đầu lòng của họ mất đầu năm 1946, ít tháng sau chiến tranh.



Thời kỳ này Kodaira nghiên cứu nhiều về các diện Riemann, lý thuyết hàm đại số một biến phức. Ông viết những công trình rất dài mà hoàn toàn không nghĩ là sẽ đăng ở đâu: thời đó các tạp chí khoa học ở Nhật Bản không phát hành, và các nhà khoa học Nhật không được phép trao đổi tự do với nước ngoài. Nhờ sự giúp đỡ của Kakutani (lúc đó là giáo sư ở Mỹ), bài báo của Kodaira được gửi đến tạp chí *Annals of Mathematics* (tạp chí hàng đầu về toán), và nhanh chóng được công bố. Hermann Weyl chú ý đến bài báo đó, và mời Kodaira đến Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton năm 1949. Kodaira lúc đầu chỉ có ý định sống một năm tại Mỹ, nhưng rồi ông nhận được lời mời làm giáo sư tại Đại học Johns Hopkins và một

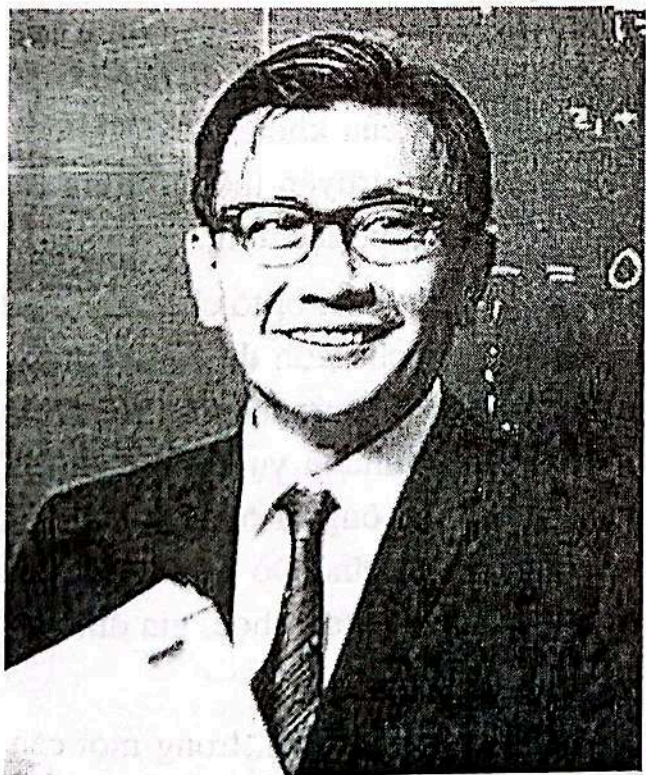
số đại học khác. Năm 1950, gia đình ông (bà Seiko cùng với hai con gái, Yasuko và Mariko³) đến sống cùng ông tại Mỹ, và gia đình họ ở đó 18 năm.

Tại Princeton, Kodaira cùng với Spencer lập một xêmina với tên gọi "*Nothing Seminar*", với hàm ý rằng, không có một hạn chế nào cho đề tài của xêmina, và có thể trình bày ở đó mọi điều của toán học. Trong số các thành viên của xêmina có

³ Bà Mariko là vợ của giáo sư toán học Mutsuo Oka, một người rất có cảm tình với các nhà toán học Việt Nam.

những người mà về sau tên tuổi hết sức nổi tiếng trong toán học: Hirzebruch, Andreotti, Grauert, Vesentini, Satake...Người ta kể lại rằng, Kodaira đặc biệt chăm chú lắng nghe những câu hỏi chứng tỏ người đặt ra câu hỏi không hiểu vấn đề đang được trình bày. Ông kiên nhẫn tìm cách trả lời, để qua câu trả lời của ông, người ta hiểu thêm câu hỏi của chính họ! Spencer và Kodaira thường tranh luận với nhau về toán trong ôtô. Những người ngồi cùng xe nhiều khi thót tim vì Spencer vừa lái xe với tốc độ tối đa, vừa ngoảnh lại tranh cãi với Kodaira đang ngồi ở ghế sau. Người ta rất ngạc nhiên là tại sao vẫn chưa xảy ra tai nạn nào, đúng như Spencer và Kodaira thường trấn an họ: "*Chẳng có gì phải lo đâu!*". Khi hỏi Kodaira là ông ta có biết lái xe không, thì Kodaira trả lời: "*Biết chút, nhưng chỉ biết lý thuyết thôi!*".

Không giống như một số nhà toán học khác thích làm việc trong không khí riêng biệt và yên tĩnh, Kodaira thích sự ấm cúng của gia đình. Ông thường mời bạn bè đến nhà bàn chuyện toán, trong khi bà Seiko làm bánh đãi khách. Người ta kể rằng, đến nhà ông, bất cứ lúc nào cũng thấy ông đang làm toán, nhưng ít khi làm trong phòng làm việc, mà phần lớn thời gian là trong phòng ăn! Ở đâu cũng thấy giấy tờ của ông: trên các ghế trong phòng khách, phòng ăn luôn tìm thấy các trang giấy với đầy những công thức đang tính dở dang.



Ở Mỹ, ban đầu Kodaira làm việc tại Princeton hai năm, sau đó ông chuyển về trường Đại học Harvard một năm, rồi từ 1962, nhận một ghế giáo sư tại trường Đại học Johns Hopkins. Từ năm 1965, ông rời Johns Hopkins để về trường Đại học Stanford. Kodaira trở về Nhật Bản năm 1967, giảng dạy tại trường Đại học Tokyo và một số đại học khác. Ông cũng từng làm Trưởng khoa Khoa học của trường Đại học Tokyo, nhưng người ta nói rằng, ông chẳng thích thú gì với công việc hành chính, và chỉ say mê với những ý tưởng toán học sâu sắc của mình.

Các công trình toán học của Kodaira trải rộng trên nhiều lĩnh vực. Những công trình đầu tiên của ông phản ánh một sự quan

tâm rất rộng, và ông là đồng tác giả với nhiều nhà toán học Nhật Bản, mà chuyên ngành của họ rất khác nhau: Abe, Iyamaga, Kakutani,... Thời kỳ tiếp theo, Kodaira chịu ảnh hưởng nhiều của Hermann Weyl, và ông có những công trình quan trọng về sử dụng các phương pháp của không gian Hilbert để nghiên cứu giải tích điều hoà trên các đa tạp Riemann, và một số vấn đề liên quan trong hình học đại số. Nổi bật nhất là những công trình viết chung của ông với Spencer về sử dụng lý thuyết bó và các nhóm đối đồng điều trong hình học đại số. Hình học đại số chính là tâm điểm các nghiên cứu của Kodaira. Ông đã xây dựng những phương pháp mạnh mẽ và hiệu quả để nghiên cứu các không gian giải tích phức, đặc biệt là các không gian giải tích phức compact. Các công trình về biến dạng các cấu trúc phức của Kodaira và Spencer được xem là những công trình sâu sắc nhất trong lĩnh vực này, và ảnh hưởng của chúng còn thấy rõ cho đến tận ngày nay. Một đặc điểm của các công trình của Kodaira là ông luôn cho những tính toán và những cấu trúc rất cụ thể.

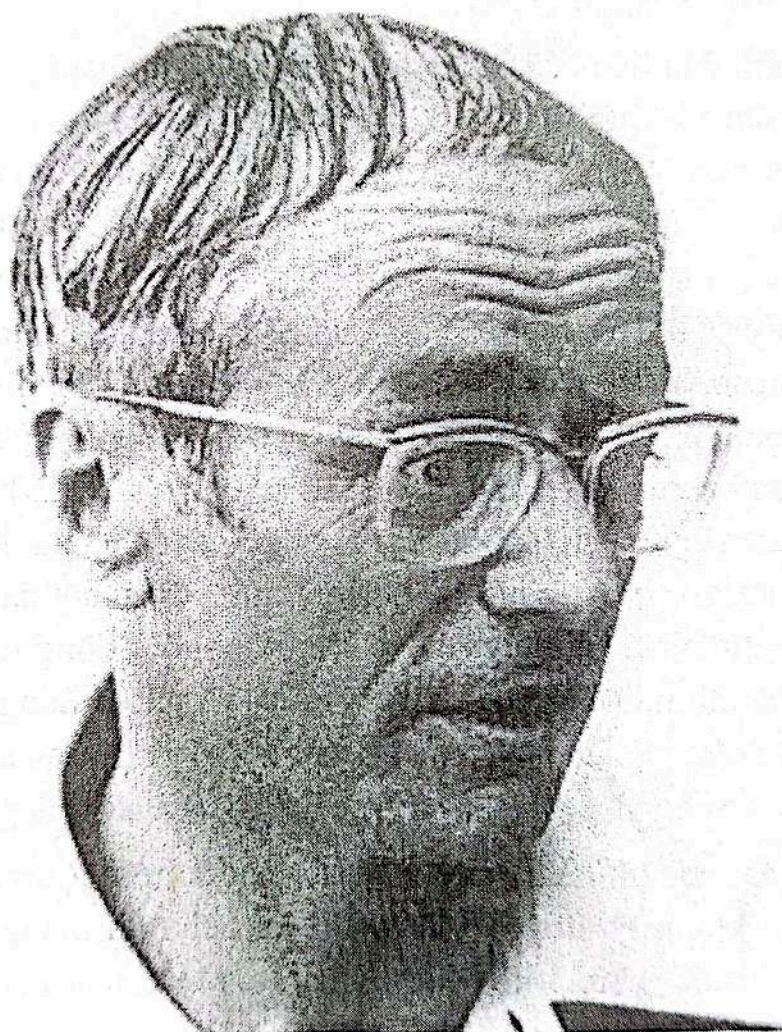
Trở về Nhật Bản, ông tổ chức xêmina cho các sinh viên giỏi của các trường. Xêmina sinh hoạt đều đặn hàng tuần, thường là vào thứ bảy. Các vấn đề được đề cập trên xêmina là những vấn đề thời sự nhất của toán học. Năm 1965, đúng tuổi 60, ông nghỉ hưu theo quy chế, nhưng vẫn không thôi hoạt động khoa học tích cực. Ông tiếp tục làm việc tại trường tư thục Gakushuin, đào tạo được những học trò xuất sắc như Iitaka, Shioda, Baily, và nhiều người khác. Thời kỳ này, ông ít khi rời Nhật Bản, ngoại trừ một số ít trường hợp, như đi Israel năm 1985 để nhận Giải thưởng Wolf (một trong những giải thưởng cao quý nhất của khoa học). Khi đó, Kodaira, cùng với người con gái Yasuko trong bộ kimono truyền thống, trông đã rất mệt mỏi sau một chặng đường dài và những buổi đón tiếp, tiệc tùng.

Năm 1986, khi Hội toán học Nhật Bản bắt đầu công việc chuẩn bị tổ chức Đại hội toán học thế giới 1990 tại Tokyo, ông được đề cử Chủ tịch danh dự của đại hội. Ông tham gia và chủ tọa một số phiên họp đầu của ban tổ chức. Nhưng rồi bệnh hen suyễn làm sức ông yếu dần, và ông đành từ bỏ mọi nhiệm vụ liên quan đến Đại hội. Có một việc ảnh hưởng nhiều đến sức khoẻ của ông là ông đã bắt đầu thấy khó khăn khi nghe nhạc, và không thể chơi đàn được nữa. Đó là tổn thất lớn của ông, vì đối với ông trong đời chỉ có ba điều quan trọng: toán học, gia đình và âm nhạc.

Kodaira mất ngày 16 tháng 7 năm 1997 ở bệnh viện Yamanashi, trong một căn phòng có cửa sổ nhìn ra đỉnh Phú Sĩ.

JEAN-PIERRE SERRE

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1954



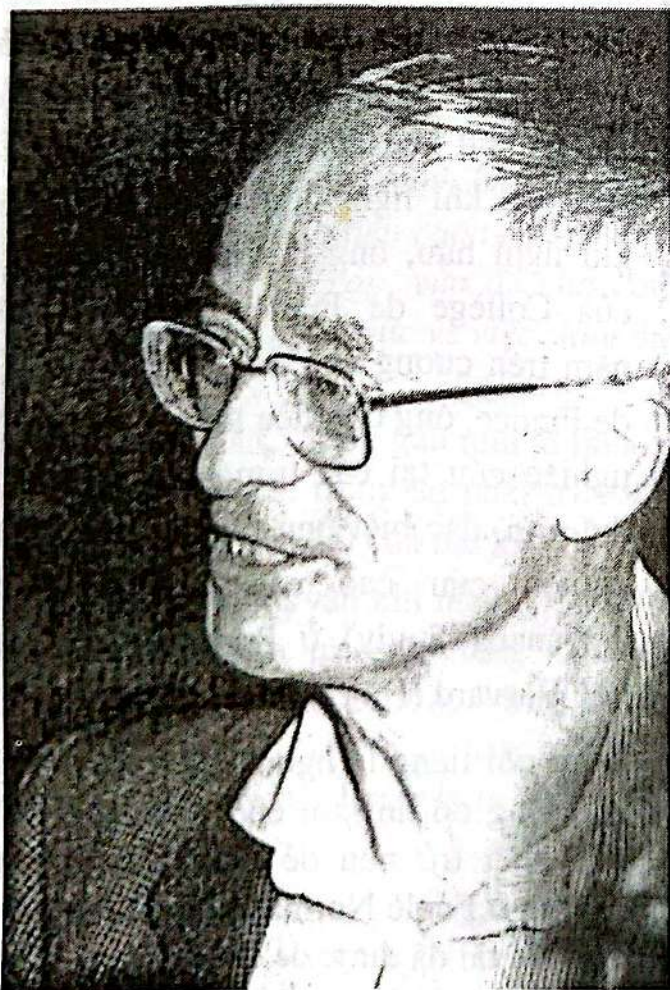
Có lẽ trong lịch sử toán học, cho đến nay chưa từng có nhà toán học nào nhận được nhiều giải thưởng cao quý và nhiều sự tôn vinh như Jean-Pierre Serre! Ông nhận Giải thưởng Fields năm 1954, được tặng Bội tinh danh dự, được bầu vào Viện Hàn lâm Hoàng gia Anh năm 1974, và nhiều Viện hàn lâm khác như Pháp, Thụy Điển, Hoa Kỳ, Hà Lan. Ông được trao Giải thưởng Gaston Julia năm 1970, Giải thưởng Balzan năm 1985, Steele Prize (của Hội Toán học Hoa Kỳ) năm 1995, Giải thưởng Wolf năm 2000. Ông là người đầu tiên được trao Giải thưởng Abel năm 2003⁴. Serre là Tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học : Cambridge (1978), Stockholm (1980), Glasgow (1983).

Những công trình đầu tiên của Serre được viết khi ông tham gia xêmina của Henri Cartan về tôpô đại số. Ông kể rằng trên xêmina, Cartan không bao giờ đặt ra đề tài nghiên cứu cho học trò, mà họ phải tự tìm lấy. Sau đó, Cartan mới giúp đỡ họ. Những người không thể tự đặt ra cho mình đề tài nghiên cứu sau một thời gian tham gia xêmina thì sẽ tự nguyện ra đi. Tại xêmina, Serre nhận thấy rằng, lý thuyết của Leray về không gian phân thớ và dãy phổ có thể áp dụng cho nhiều tình huống rộng hơn so với người ta nghĩ ban đầu, mà một trong những hướng như thế là việc tính nhóm đối đồng điều. Nói một cách đơn giản, dãy phổ là một cấu trúc đại số tương tự như dãy khớp, nhưng phức tạp hơn. Năm 1951, Serre áp dụng các dãy phổ để nghiên cứu quan hệ giữa các nhóm đồng điều của thớ, không gian toàn thể và không gian cơ sở trong một phân thớ. Chính điều này đã giúp ông phát hiện ra các quan hệ cơ bản giữa nhóm đồng luân và nhóm đồng điều của một không gian và chứng minh những kết quả quan trọng về nhóm đồng luân của mặt cầu. Công trình của Serre đã làm cho các nhà tôpô nhận ra tầm quan trọng của các dãy phổ. Dãy phổ Serre cho một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu đồng điều các phân thớ.

Các phương pháp và kết quả trong luận án của Serre được xem là gây nên một cuộc cách mạng trong lý thuyết đồng luân, làm cho nó mang diện mạo hiện đại như ngày nay. Trước Serre, nhóm đồng luân của các mặt cầu là mảnh đất chưa

⁴ Giải thưởng Abel do Viện hàn lâm khoa học và văn học Na Uy trao tặng hàng năm, giành cho những công trình kiệt xuất trong lĩnh vực toán học. Khác với Giải thưởng Fields, Giải thưởng Abel không có hạn chế về độ tuổi của người được trao giải. Người được Giải thưởng Abel sẽ nhận được số tiền 6.000.000 curon Na Uy (tương đương 920.000 USD).

được biết đến (Serre dùng chữ latin *terra incognita*), thậm chí họ còn chưa biết nó sinh hữu hạn. Phương pháp do Serre đề xuất có đặc trưng đại số, nó cho phép tiến hành các “tính toán địa phương”. Serre kể lại rằng, để có thể áp dụng lý thuyết của Leray, ông cần có một không gian phân thớ mà nói chung không tồn tại trong định nghĩa thông thường trước đó. Theo ngôn ngữ chuyên môn, ông cần có không gian phân thớ E với cơ sở X và với nhóm đồng luân tầm thường. Một đêm hè năm 1950, khi trên chuyến tàu hỏa trở về sau kỳ nghỉ, trong đầu ông bỗng loé lên một tia chớp: Chỉ cần lấy E là *không gian các đường thẳng* trên X (với một điểm gốc a cố định). Khi đó thớ sẽ là *không gian loop* $\Omega(X, a)$. Không nghĩ ngợi gì nữa, chính là nó! Ông vui sướng đến nỗi lay vợ đang ngủ dậy để kể về cái không gian phân thớ vừa tìm được! Serre cho rằng, thật kỳ lạ, khi mà một đối tượng đơn giản như thế lại có thể có nhiều ứng dụng đến vậy trong toán học. Khi người ta hỏi ông là những “tia chớp” của sáng tạo như thế có thường đến với ông không, ông nói rằng, nó thật tuyệt vời, nhưng không nhiều, chỉ hai, ba lần trong khoảng thời gian 15 năm. Một trong những “tia chớp” như thế, tia chớp đến với ông trong đêm hè đáng nhớ ấy đã mang về cho ông Giải thưởng Fields năm 1954.



Từ sau “những năm tôpô”, các công trình của Serre chủ yếu thuộc lĩnh vực số học và hình học đại số. Tuy vậy, ông nói rằng, không phải là ông thay đổi lĩnh vực nghiên cứu, mà thực chất, tất cả các vấn đề đó đều liên quan với nhau. Chẳng hạn, trong các nghiên cứu về lý thuyết số, lý thuyết nhóm, hình học đại số, ông sử dụng các tư tưởng của tôpô như đồng điều, lý thuyết bó và cản trở. Đề tài mà ông yêu thích nhất là biểu diễn ℓ -adic

và các dạng môđul, vì trong đó cần đến cả số học, hình học đại số, nhóm Li và tổ hợp. Mặc dù làm việc trong nhiều lĩnh vực khác nhau, Serre vẫn tự cho rằng, ông không có nhiều trực

giác về giải tích, mà thích hợp hơn với những trực giác hình học và đại số.

Khi người ta hỏi Serre: công trình nào của ông mà ông cho là hay nhất, Serre hỏi lại: anh đã bao giờ hỏi một người mẹ xem họ yêu đứa nào nhất trong những đứa con của mình? Đối với ông, chỉ có những công trình được viết ra dễ dàng, và những công trình được viết một cách khó khăn. Trong số những công trình “dễ viết”, ông kể tên bài “*Bổ đại số coherent*” (một công trình rất nổi tiếng), còn khó nhất là bài báo đề tặng Manin, trong đó ông đưa ra một số giả thuyết về biểu diễn môđul Galois môđul p (công trình có vai trò rất quan trọng trong chứng minh định lý lớn Fermat của Wiles sau này). Bài báo đó làm ông thấy mệt đến nỗi ông ngừng công bố trong mấy năm liền sau đó!

Jean-Pierre Serre sinh ngày 15 tháng 9 năm 1926 ở Bages, miền nam nước Pháp. Sau khi tốt nghiệp trường trung học Nîmes, ông vào học trường Ecole Normale Supérieure ở Paris từ 1945 đến 1948. Ông nhận bằng tiến sĩ ở Sorbonne năm 1951. Từ 1948 đến 1954 ông là nghiên cứu viên của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia (CNRS).



Năm 1954 Serre chuyển đến làm việc tại Đại học Nancy cho đến năm 1956. Từ năm 1956, ông giữ ghế Giáo sư đại số và hình học của Collège de France cho đến khi nghỉ hưu năm 1994. Sau khi nghỉ hưu, ông là giáo sư danh dự của Collège de France. Trong nhiều năm trên cương vị giáo sư của Collège de France, ông có điều kiện đi trao đổi nghiên cứu tại các trung tâm lớn trên thế giới, đặc biệt ông thường đến Viện nghiên cứu cao cấp (Institute for Advanced Study) ở Princeton và Đại học Harvard (Hoa Kỳ).

Serre nổi tiếng là người thầy giáo tuyệt vời. Ông có tài làm cho những vấn đề khó nhất trở nên dễ hiểu. Tôi có cái

may mắn khi vào năm 1988 được nghe ông giảng ở Ecole Normale Supérieure. Đó là bài giảng về sự tương tự giữa số và hàm, một đề tài đã được đề cập trong bài viết của Weil. Trong số các thánh giả, có rất nhiều nhà toán học nổi tiếng như Mazur,

Fontaine,...nhưng cũng có nhiều sinh viên. Trước khi giảng, Serre đề nghị các sinh viên giơ tay để ông đếm, và khi thấy tỷ lệ sinh viên tương đối cao, ông bắt đầu từ "abc". Nhưng chỉ ít phút sau, những vấn đề mới nhất được trình bày hết sức dễ hiểu cho tất cả mọi người. Các cuốn sách của ông là những ví dụ điển hình của sự trình bày vừa súc tích, vừa sáng sủa. Khi để tựa một cuốn sách của Serre cho bản dịch tiếng Nga, Manin đã từng nhận xét: "*Các cuốn sách của Serre sẽ có cuộc sống lâu dài trong toán học*". Cuốn sách "Giáo trình Số học" của ông đã được tái bản khoảng 30 lần, dịch ra hơn 15 thứ tiếng (tiếc là chưa có bản dịch tiếng Việt, mặc dù nó đã được dùng để giảng dạy ở các lớp cao học tại Viện Toán học). Các cuốn sách của Serre cũng thể hiện sự quan tâm rộng lớn của ông: *Đồng điều kì dị của các không gian phân thớ* (1951), *Bó đại số coherent* (1955), *Nhóm đại số và trường các lớp* (1959), *Trường địa phương* (1962), *Đối đồng điều Galois* (1964), *Nhóm Lie và đại số Lie* (1964), *Biểu diễn Abel l-adic* (1968), *Giáo trình Số học* (1970), *Biểu diễn tuyến tính các nhóm hữu hạn* (1971) *Cây, analgames, SL_2* (1977), *Bài giảng về định lý Mordell-Weil* (1989), *Các vấn đề của lý thuyết Galois* (1992).

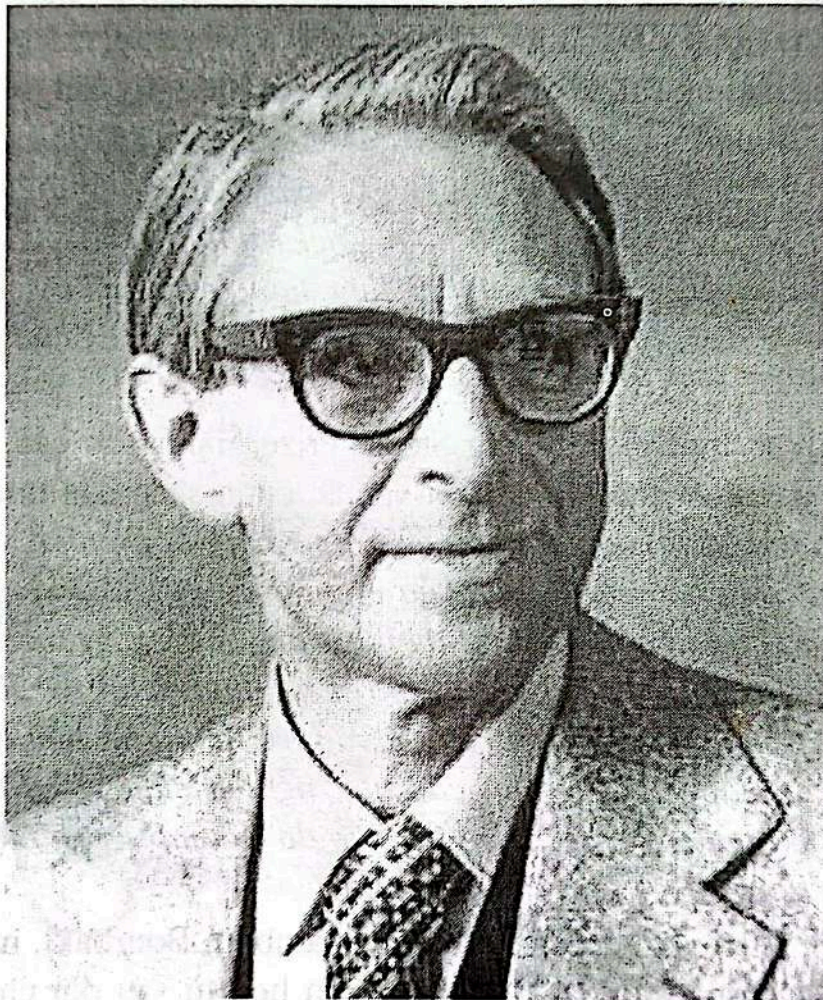
Năm 1995 ông được trao giải thưởng Steele Prize giành cho các sách Toán xuất sắc. Khi trao giải, người ta đã nhận xét về các cuốn sách của ông như sau: *Thật khó mà xác định được cuốn sách nào của Serre xứng đáng nhất với Steele Prize. Bất kỳ cuốn nào trong các cuốn sách của ông đều xứng đáng với giải thưởng đó. Mỗi cuốn sách của ông đều được viết một cách tuyệt vời, với nhiều tư liệu gốc của chính tác giả, và được trình bày một cách rất hài hoà. Khó có thể cải tiến cách trình bày của ông; nhiều cuốn sách của ông đã trở thành tài liệu tiêu chuẩn trong lĩnh vực mà nó đề cập, vừa để cho các nhà nghiên cứu, vừa là cho sinh viên. Chúng là những mẫu mực về việc: làm thế nào để viết một cách hiệu quả, rõ ràng, và có ảnh hưởng lớn.*

Trong nhiều năm, Serre gần như là linh hồn của nhóm Bourbaki, một nhóm đã để lại dấu ấn sâu sắc trong sự phát triển của toán học từ sau đại chiến thứ hai đến khoảng những năm 90 của thế kỷ 20.

Trong cuộc phỏng vấn khi nhận Giải thưởng Abel năm 2003, khi Serre đã 77 tuổi, có người hỏi ông: trong khoảng 15 năm liền, ông đứng trên tuyến đầu của toán học, liệu đó có phải là một "phản ví dụ" cho câu mà người ta vẫn thường nói: "*Toán học là cuộc chơi của tuổi trẻ*"? Serre trả lời rằng, hoàn toàn không, vì khi trao Giải thưởng Abel, người ta nhắc nhiều nhất đến những điều ông đã làm từ khi mới 30 tuổi!

KLAUS FRIEDRICH ROTH

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1958



Thông thường, để giải một giả thuyết khó nào đó của toán học, người ta phải xây dựng nên một lý thuyết mới, nhờ đó nhìn bài toán đặt ra dưới ánh sáng mới, và có thể áp dụng vào đó những kỹ thuật mới. Điều này cũng dễ hiểu, vì nếu dùng công cụ mà ai cũng đã biết thì khó có thể làm cái gì hay hơn những người đi trước, trừ phi bạn thông minh nhiều lần hơn họ! Cũng tựa như khi ta đào hố với cái xẻng, chắc không thể đào sâu hơn những người khác là bao, cho dù có sức khoẻ phi thường. Muốn đào được sâu hơn, cần đến những công cụ mới. Muốn giải quyết những vấn đề tồn đọng, phải cần có lý thuyết mới.

Nhưng quy luật nào cũng có ngoại lệ, và Roth chính là một ngoại lệ của “quy luật” mà ta nhắc đến ở trên: Hầu như chỉ với những công cụ mà mọi người đều biết, ông giải được hai vấn đề hết sức khó khăn, là Giả thuyết Erdos-Turan về *mật độ của dãy số không chứa ba số hạng nào lập thành cấp số cộng*, và *vấn đề xấp xỉ các số vô tỷ đại số bởi các số hữu tỷ* (kết quả đã mang về cho ông Giải thưởng Fields năm 1958). Những kết quả của ông là là điểm khởi đầu cho nhiều lý thuyết mới quan trọng của toán học.

Bài toán về xấp xỉ hữu tỷ là một trong những bài toán lâu đời nhất của toán học, xuất phát từ những nghiên cứu về tỷ lệ các số của Edoxus (khoảng năm 350 sau công nguyên), được bổ sung bởi các công trình của Euclid và Diophantus. Cho đến khoảng giữa thế kỷ 19, Dirichlet chứng minh kết quả quan trọng nói rằng, nếu α là một số đại số vô tỷ thì tồn tại vô hạn số hữu tỷ p/q “xấp xỉ tốt” α theo nghĩa sau đây:

$$|p/q - \alpha| < 1/q^2.$$

Trong nhiều vấn đề của toán học, người ta cần xấp xỉ các số đại số vô tỷ bởi các số hữu tỷ. Liouville chỉ ra rằng, nếu α là số đại số vô tỷ bậc n , tức n là bậc thấp nhất có thể của đa thức hệ số nguyên nhận α là nghiệm, thì với mọi số $\epsilon > 0$ nhỏ tùy ý, chỉ tồn tại *hữu hạn* số hữu tỷ p/q thoả mãn bất đẳng thức sau :

$$|p/q - \alpha| < 1/q^{n+\epsilon}.$$

Nhiều nhà toán học nổi tiếng như Thue, Maler, Gelfond, Schneider, Siegel đã cố gắng chứng minh những mở rộng của kết quả trên, với số mũ của q ngày càng nhỏ. Năm 1955, Roth chứng minh định lý nổi tiếng nói rằng, nếu α là số đại số vô tỷ, thì với mọi số $\epsilon > 0$ nhỏ tùy ý, chỉ tồn tại *hữu hạn* số hữu tỷ p/q thoả mãn bất đẳng thức sau:

$$|p/q - \alpha| < 1/q^{2+\epsilon}.$$



Điều đáng chú ý là số mũ 2 trong định lý Roth không hề phụ thuộc bậc n của số vô tỷ α . Cùng với kết quả của Dirichlet, từ định lý trên cũng suy ra rằng, không thể làm cho số mũ nhỏ hơn được nữa (vì khi đó sẽ tồn tại vô hạn số hữu tỷ xấp xỉ tốt). Như vậy, công trình của Roth đã chấm dứt một hành trình dài của bài toán xấp xỉ hữu tỷ, đồng thời nó mở ra một trang mới cho sự phát triển của số học. Trong bài giới thiệu kết quả của Roth tại Đại hội toán học thế giới năm 1958, Davenport nói rằng, *kết quả của Roth đã giải quyết một bài toán vừa rất cơ bản, vừa vô cùng khó khăn. Nó sẽ còn là mảnh*

đất tốt mà trên đó toán học có thể đơm hoa kết trái lâu dài.

Có thể nói lời giới thiệu của Davenport là một tiên đoán thiên tài: Ngay trong những năm tiếp theo, nhiều thành tựu của vấn đề *xấp xỉ hữu tỷ đồng thời* các số đại số đã đạt được nhờ sử dụng công trình của Roth. Nhưng điều đáng nói nhất là hơn 30 năm sau kết quả của Roth, vào khoảng những năm cuối của thập niên 80 của thế kỷ 20, dưới ảnh hưởng của những giả thuyết của Lang, Vojta đã phát hiện ra mối liên quan kì lạ giữa định lý Roth và lý thuyết Nevanlinna (trong giải tích phức)⁵. Thông qua một “tờ diễn” của mình, Vojta đã “phiên dịch” các kết quả của lý thuyết Nevanlinna sang lĩnh vực xấp xỉ hữu tỷ các số đại số, mà trong đó định lý Roth có vai trò trọng tâm. Nhờ triết lý đó, Vojta đã giải quyết được nhiều bài toán quan trọng của số học, thậm chí đưa ra một “lược đồ” để chứng minh định lý Fermat (vào thời điểm đó, định lý Fermat chưa được chứng minh). Công trình của Vojta và một số người khác làm ta thấy rõ hơn sự sâu sắc trong chứng minh của Roth, mặc dù chỉ sử dụng những kiến thức đại số mà sinh viên toán những năm cuối có thể hiểu được. Điều kỳ lạ hơn nữa là Roth làm ra kết quả của mình chỉ một năm sau khi được giao trình bày trong xêmina công trình của Siegel về vấn đề xấp xỉ hữu tỷ. Kết thúc bài giới thiệu của mình, Davenport nhấn mạnh, *trong cuốn*

⁵ Xem bài viết về L. Alhfors trong cuốn sách này.

sách "Alice ở xứ sở diệu kì" có nói rằng, trong bất cứ điều gì cũng ẩn chứa một "luân lý" nào đó, miễn là ta cố gắng tìm kiếm. Không khó để có thể tìm ra điều đó trong công trình của Roth. Đó là, một vấn đề của toán học dù khó khăn, bí hiểm đến đâu, dù những người khác đã bỏ nhiều công sức đến đâu mà vẫn chưa thu được kết quả, ta vẫn có thể có cách tấn công trực diện. "Trực diện" ở đây có nghĩa là không cần đi vòng quanh, không cần đến một lý thuyết nào mới. Mặc dù câu nói của Davenport có thể là đúng, vẫn thật khó tìm ra ví dụ thứ hai, ngoài định lý Roth, khi mà người ta có thể đạt đến những phát minh vĩ đại chỉ với những công cụ mà ai cũng biết!

Klaus Roth sinh ngày 25 tháng 10 năm 1925 tại Breslau, nước Phổ (ngày nay là thành phố Wroslaw, Ba Lan). Ngay từ khi còn rất trẻ, ông chuyển đến Anh, theo học trường Saint Paul ở London từ năm 1939 đến năm 1943, sau đó chuyển về Peterhouse, Cambridge, và nhận bằng đại học tại đó năm 1945.

Sau khi tốt nghiệp, Roth được bổ nhiệm làm trợ lý giám đốc của trường Trung học Gordonstoun nổi tiếng, cách thành phố Elgin của Scotland 10 kilômét về phía bắc. Trường được lập nên năm 1934 bởi Kurt Hahn, một nhà giáo dục người Đức. Trường chỉ nhận các học sinh nam, và mục tiêu của trường là dạy cho học sinh không chỉ về kiến thức, mà còn chú ý rèn luyện tính cách của họ. Chính vì thế mà học sinh phải sống trong một môi trường khắc khổ về vật chất.

Roth chỉ làm việc ở trường Gordonstoun một năm, rồi chuyển về nghiên cứu ở University College năm 1946. Hai năm sau, ông nhận bằng thạc sĩ và được bổ nhiệm làm phụ giảng tại đó. Năm 1950, ông bảo vệ luận án tiến sĩ và được nhận làm giảng viên. Chính trong thời gian này, Roth đã đạt được những thành tựu lớn nhất của mình. Năm 1952, ông chứng minh giả thuyết của Erdos và Turan đề ra năm 1935: Nếu một dãy số mà trong đó không tìm được cấp số cộng nào gồm 3 số hạng, thì dãy đó có "rất ít" phần tử (chính xác hơn, nếu $N(x)$ là số phần tử của dãy và bé hơn x , thì tỷ số $N(x)/x$ dần đến 0, tức là dãy đó có "mật độ 0"). Năm 1955, ông chứng minh "Định lý Roth" nổi tiếng, định lý đã mang về cho ông Giải thưởng Fields năm 1958. Nhờ những thành công đó, ông được phong giáo sư của University College năm 1961. Đến năm 1966, ông chuyển đến trường Hoàng gia ở London, và làm việc tại đó đến 1996 thì trở về bắc Scotland, không xa Gordonstoun, nơi ông bắt đầu sự nghiệp của mình.

Ngoài Giải thưởng Fields, Roth còn nhận được Giải thưởng De Morgan của Hội toán học London và Huy chương Sylvester của Viện hàn lâm Hoàng gia năm 1991.

RENÉ THOM

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1958



Nhiều người cho rằng, René Thom là nhà tư tưởng lớn nhất của toán học thế kỷ 20. Ông cũng là một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất và có nhiều ảnh hưởng nhất trong xã hội, đến nỗi có rất nhiều tác phẩm nghệ thuật lấy đề tài từ cuộc đời ông. Nhà đạo diễn Jean-Luc Godard đã dựng bộ phim “René”, mà nhân vật chính phỏng theo con người thật của Thom. Họa sĩ nổi tiếng Salvador Dali đã vẽ loạt tranh cuối cùng của mình vào năm 1983 với đề tài lấy từ lý thuyết “tai biến” của Thom, kèm theo lời đề tặng “à René”. Lấy cảm hứng từ những công trình của Thom, nhà soạn nhạc Dusapin sáng tác bản nhạc *Loop*⁶. Điều gì đã làm nên sự nổi tiếng của Thom vượt ra ngoài thế giới toán học? Đối với mọi người, ông không chỉ là nhà toán học, mà còn là nhà triết học với những tư tưởng sâu sắc về các quy luật phát triển của tự nhiên và xã hội, với “lý thuyết tai biến” một thời nổi lên như là cơ sở để giải thích nhiều hiện tượng của sự phát triển. Nói đến Thom, trước tiên người ta nhớ đến lý thuyết tai biến. Thế nhưng, Thom nhận được Giải thưởng Fields lại không phải nhờ lý thuyết đó, mà nhờ xây dựng nên “lý thuyết cobordism”⁷, một lý thuyết dựa trên khái niệm “quá đơn giản”, gần như là “trực giác tầm thường”! Trực giác chính là điểm độc đáo nhất trong tất cả các công trình của Thom.

René Thom sinh ngày 2 tháng 9 năm 1923 ở Montbéliard, một thị trấn nhỏ của nước Pháp nằm bên bờ sông Allan chảy từ vùng Jura, Thụy Sĩ. Gia đình ông có một cửa hàng tạp hoá nhỏ, và sống trong ngôi nhà cũ, mà Thom vẫn còn nhớ là có ghi năm xây dựng 1631 trên cửa nhà. Họ sống ở đó với hai bà nội ngoại của Thom. Cuộc sống của họ có thể cứ êm đềm trôi qua trong thị trấn nhỏ như thế, nếu như không có chiến tranh xảy ra vào năm 1940. Bố mẹ của René ở lại, còn René thì cùng người anh trai Robert sơ tán sang Thụy Sĩ bằng xe đạp. Trong “Tiểu sử tự thuật” của mình, ông viết:

Chúng tôi được đón tiếp ở đó với sự nồng nhiệt đáng ngạc nhiên, mọi người gặp trên đường cho chúng tôi thực phẩm và nước uống. Điều đó làm tôi cảm động đến tận bây giờ.

⁶ Có lẽ ngoài Thom, chỉ có nhà toán học thứ hai nổi tiếng trong xã hội như thế là John Nash, người được giải Nobel, nhân vật chính của bộ phim với bốn giải Oscar “A beautiful mind”

⁷ Thuật ngữ “cobordism” chưa được dịch ra tiếng Việt. Có người đề nghị dùng chữ “đồng biên”.

Tại Thụy Sĩ, René làm việc giúp một người sản xuất nhung ở gần Romont, nhưng đến cuối tháng 9 năm đó thì ông bị buộc trở lại Pháp, sống tại Lyon trong gia đình một người bạn của mẹ. Năm 1940, Thom đã có bằng tú tài về toán, nhưng khi ở Lyon, ông theo học và lấy bằng tú tài triết học năm 1941. Có lẽ tác giả của "*Sự ổn định cấu trúc và phát sinh hình thái*" đã say mê triết học ngay từ thời đó. Tháng 6 năm 1941, hai anh em Thom tìm cách trở lại quê nhà ở Montbéliard.

Được thầy Becker ở Montbéliard giới thiệu, Thom đến Paris để tiếp tục học tại trường Lycée Saint-Louis nổi tiếng, và thi vào Ecole Normale Supérieure năm 1942, nhưng không đỗ! Ông thi lại vào năm 1943, và như ông kể, *lần này thi đỗ, nhưng không xuất sắc gì!*

Thời kì này, Montbéliard là "vùng cấm", và ông rất khó mới có thể thỉnh thoảng về thăm gia đình. Cuộc sống ở Paris ngột ngạt dưới sự chiếm đóng của Đức quốc xã. Tuy vậy, ông Hiệu phó Bruhat đã cố hết sức để sinh viên có thể yên ổn học hành (dù phải xung khắc với thầy Hiệu trưởng, bất đồng về chính trị), cho đến khi Bruhat bị bắt. Thom viết:

... Năm cuối cùng, sau "chiến thắng", là một năm mang lại ấn tượng cởi mở, được sống hết mình. Về sự hồi sinh đó, tôi có thể gọi là một sự chấn động của tự do mà tôi khó có thể tự kiềm chế.

Mặc dù cuộc sống ở Ecole Normale thời đó khá nặng nề, nhưng "đời sống toán học" của trường thì lại rất tuyệt vời. Đó là thời kỳ mà nhóm Bourbaki mới lập, và có những ảnh hưởng lớn trong toán học. Thom theo các bài giảng của Henri Cartan, và cuối năm 1946 thì ông quyết định chuyển đến Strasbourg để tiếp tục làm việc với Henri Cartan. Ở đó ông cũng chịu ảnh hưởng của những người khác, như Ehresman và Koszul. Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ năm 1951 dưới sự hướng dẫn của Henri Cartan về *Không gian phân thớ trên mặt cầu và đại số Steenrod*. Công trình được hoàn thành tại Strasbourg, nhưng Thom bảo vệ luận án ở Paris.

Cơ sở của lý thuyết cobordism, mà nhờ nó Thom nhận Giải thưởng Fields, đã xuất hiện ngay từ luận án tiến sĩ của ông. Có thể mô tả một cách thô thiển ý tưởng về cobordism của Thom như sau: Giả sử A, B là hai đa tạp m chiều (đối tượng cơ bản của hình học chiều cao, mà trong không gian ba chiều thì có thể hiểu đây là những vật thể hình học tương đối "nhấn"). Khi đó, A và B được gọi là *cùng một lớp cobordism* nếu A hợp "lạ" với B (được lấy với hướng ngược lại, tức là đa tạp $-B$) làm thành biên của một đa tạp $m+1$ chiều (tương tự như hai cái thúng úp vào nhau thì thành "biên" của một hình cầu). Với định nghĩa như vậy, tất cả các đa tạp được

phân thành các lớp cobordism, và tập hợp các lớp cobordism thoả mãn rất nhiều tính chất đẹp đẽ, lập thành *dại số Thom*. Trong bài phát biểu về công trình của Thom khi ông được Giải thưởng Fields, Hopf nói rằng, cobordism của Thom cũng đơn giản đến kì lạ, giống như định nghĩa về đồng luân của Hurewicz. Và cũng như khái niệm đồng luân rất đơn giản và trực quan đó, cobordism cũng trở thành một trong những khái niệm nền tảng của toán học. *Đồng luân* và *cobordism* một lần nữa chứng tỏ rằng, chân lý bao giờ cũng rất đơn giản, và thiên tài chính là người nhận ra quy luật phổ quát trong những hiện tượng bình thường hàng ngày. Vào thời đó, Hurewicz được xem là nhà hình học lớn nhất, và ông qua đời năm 1956, đúng vào thời kì Thom sáng tạo nên lý thuyết cobordism. Hopf nói rằng, Thom chính là người thay thế xứng đáng cho Hurewicz. Ngay sau khi ra đời, cobordism đã có ảnh hưởng lớn. Được khích lệ bởi lý thuyết cobordism, Hirzebruch chứng minh Định lý Riemann-Roch-Hirzebruch, một trong những thành tựu rực rỡ nhất của tô pô thời bấy giờ. Cobordism cũng được Milnor sử dụng trong chứng minh sự kiện gây chấn động về sự tồn tại nhiều cấu trúc vi phân khác nhau trên mặt cầu 7 chiều. Đối với Thom, hệ quả của cobordism chính là Giải thưởng Fields, và hệ quả quan trọng nhất của Giải thưởng Fields là ông nhận được một ghế giáo sư của Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES) ở Bures-sur-Yvette! Ông nói rằng, điều may mắn nhất cho ông là nhờ Giải thưởng Fields mà người ta để cho ông hoàn toàn tự do, “muốn làm gì thì làm”. Với những nhà tư tưởng lớn như Thom thì tự do chính là điều kiện cần thiết nhất để phát triển. Về sau, có lần Thom nói rằng, “đối với những người hàng đầu, đừng hỏi họ đang đi đâu. Khi biết mình đang đi đâu, người ta không đi được xa!” (*quand on sait où on va, on va pas loin*).

Nhưng cũng phải đến năm 1964 ông mới chuyển về Viện nghiên cứu khoa học cao cấp ở Bures-sur-Yvette và sống ở đó cho đến cuối đời, năm 2002. Tuy nhiên điều này dẫn đến một sự thay đổi trong hướng đi, như sau này Thom giải thích:

Quan hệ của tôi với bạn đồng nghiệp Grothendieck không thật dễ chịu. Tài năng tính toán của ông ta thật nổi bật. Xêmina của ông ta thu hút tất cả giới toán học Paris, mà tôi thì không có gì mới để nói. Điều này làm cho tôi rời bỏ thế giới toán học chật chội để quan tâm đến những khái niệm tổng quát hơn, như lý thuyết phát sinh hình thái, một đối tượng làm tôi thích thú hơn và dẫn tôi đến một dạng rất tổng quát của sinh học "triết học".

Thom nói rằng, Leon Motchane, Viện trưởng của IHES thời đó, không phản đối gì, hoặc làm ra vẻ không phản đối! Trong vài ba năm đầu sống ở IHES, ông chủ trì một xêmina nổi tiếng dưới tên gọi “Crazy seminar” (Xêmina điên), trong đó ông trở về với Aristote và các nhà triết học cổ điển Hy Lạp. Kết quả của những năm làm việc này là sự ra đời của cuốn sách “Sự ổn định cấu trúc và phát sinh hình

thái”. Nhiều ý kiến trái ngược nhau về cuốn sách. Ngay khi nó chưa ra đời, một số nhà khoa học cho rằng, đó như là một lý thuyết Darwin mới, vì nó cố gắng giải thích các hiện tượng của tự nhiên và xã hội (điều này tôi nghe từ Giáo sư Tạ Quang Bửu, tên cuốn sách trong tiếng Việt cũng là do Giáo sư dịch từ “Stabilité structurelle et morphogenèse”). Theo Thom, bất kì sự vật nào trong quá trình phát triển cũng đi đến sự “ổn định cấu trúc”, cho đến khi đạt được mức độ tới hạn thì “phát sinh hình thái” mới, để trở thành sự vật mới, và dần lại đi đến ổn định. Điều quan trọng là ông mô tả các luận thuyết đó trên ngôn ngữ và công cụ toán học, và như thế, gần với một “chứng minh” hơn là một lý luận triết học. Vậy nhưng cuốn sách đã rất khó khăn mới tìm được nhà xuất bản chấp nhận in nó! Thom nói rằng, cuốn sách được in một phần vì danh từ “Lý thuyết tai biến” (catastrophe) đã bắt đầu xuất hiện trên báo chí.

Trong tiểu sử tự thuật của mình, Thom nói rằng lý thuyết tai biến đã có mầm mống rất sớm, từ khi ông còn ở Strasbourg. Khi đó ông nghiên cứu các “kì dị hình học” và các hiện tượng trong quang học. Lý thuyết đó của Thom là sự cố gắng lý giải, theo một cách mà không thể sử dụng phép tính vi phân, những tình hình trong đó các lực lượng thay đổi lớn dần lên, dẫn đến cái gọi là *tai biến*, hoặc chấm dứt sự biến đổi. Lý thuyết đó tìm thấy ứng dụng rộng rãi trong vật lý, sinh học, cũng như trong khoa học xã hội. Hầu như hiện tượng phát triển nào của tự nhiên và xã hội cũng dẫn đến một “tai biến” nào đó. Điều này có lẽ cũng tương tự như quy luật “lượng biến thành chất”. Tuy nhiên, vấn đề là ở đây, Thom đã dùng lý thuyết kỳ dị của toán học để nghiên cứu, phân loại các “tai biến”, và đề ra “bảy tai biến sơ cấp” nổi tiếng. Tham vọng của lý thuyết tai biến thật lớn lao, vì dường như nó cho câu trả lời cho mọi hiện tượng đột biến, nó dự đoán cách mà các “tai biến” có thể xảy ra. Lý thuyết này sau đó được phát triển bởi nhiều nhà toán học. Tuy vậy, chính René Thom giải thích tại sao lý thuyết đã từng nổi tiếng lạ thường như vậy sau này lại trở nên ít được ưa chuộng:

Có một sự kiện là lý thuyết tai biến đã chết. Nhưng người ta có thể nói rằng, lý thuyết đó chết từ chính sự thành công của nó. ...Dần dần trở nên rõ ràng rằng lý thuyết này không cho các dự báo định lượng, và người ta cho rằng, nó không có giá trị.

Tuy nhiên, nhiều khái niệm của lý thuyết tai biến sẽ còn mãi với toán học như những khái niệm cổ điển. Thom nói rằng, thuật ngữ “tai biến” đã nhiều khi phản lại ông: người ta nghĩ rằng ông gọi như thế để lôi cuốn sự chú ý. Thực ra “tai biến” tức là sự thai nghén một cái gì đó rời rạc trong một biến đổi liên tục thuần nhất không khả vi. Và ông nhớ lại rằng, trong chuyến đi Edinburgh để nhận Giải thưởng Fields, vợ ông cảm thấy “khó ở”, hoá ra lúc đó bà bắt đầu “thai nghén” đứa con sẽ

sinh ra vào ngày 17 tháng 4 năm 1959! Thật là một sự trùng hợp thú vị giữa toán học và cuộc sống.



Thom luôn luôn quan tâm đến vấn đề giảng dạy toán học. Bài viết của ông *“Toán học ‘hiện đại’ - một sai lầm sự phạm và triết học?”* đã có tiếng vang lớn. Trong bài đó, ông phê phán xu hướng muốn đưa nhanh các khái niệm của toán học “hiện đại” vào trường phổ thông: tập hợp, logic, phương pháp tiên đề... Đồng thời, Thom cũng phê phán cách người ta muốn dạy cho học sinh các khái niệm một cách “chính xác” nên đã “đại số hoá” nhiều phần, và coi thường trực giác hình học. Điều này không những làm giảm sự phát triển sáng tạo ở học sinh, mà còn

trái với quá trình nhận thức của nhân loại.

Tôi có may mắn gặp Thom lần đầu năm 1988, khi làm việc gần phòng ông ở IHES trong vòng một năm. Với nụ cười hiền lành trên môi và dáng đi chậm rãi, ông có cái gì đó gần với một nhà hiền triết phương Đông hơn là một nhà toán học phương Tây. Năm đó, một hội nghị lớn, kéo dài một tuần, được tổ chức ở Paris nhân dịp ông tròn 65 tuổi. Ngày cuối cùng, tôi ngồi cùng ông trên chuyến tàu điện từ Bures-sur-Yvette về Paris, và ngạc nhiên thấy ông thở phào nhẹ nhõm vì chỉ còn hôm đó nữa là “xong việc”! Dường như Hội nghị đó là để tôn vinh một ai khác, chứ không phải là ông. Dường như đối với ông, các ý tưởng mới là quan trọng, việc người khác nghĩ về nó thế nào phỏng có quan trọng gì.

Thom mất ngày 25 tháng 10 năm 2002, sau một thời gian dài bị bệnh. Những năm cuối đời, ông thường lúc tỉnh lúc không. Những khi tỉnh, ông nói nhiều điều mà người nghe không thật hiểu rõ. Người ta chỉ biết rằng, ông đang nói về những điều gì đó rất bí ẩn và cao siêu.

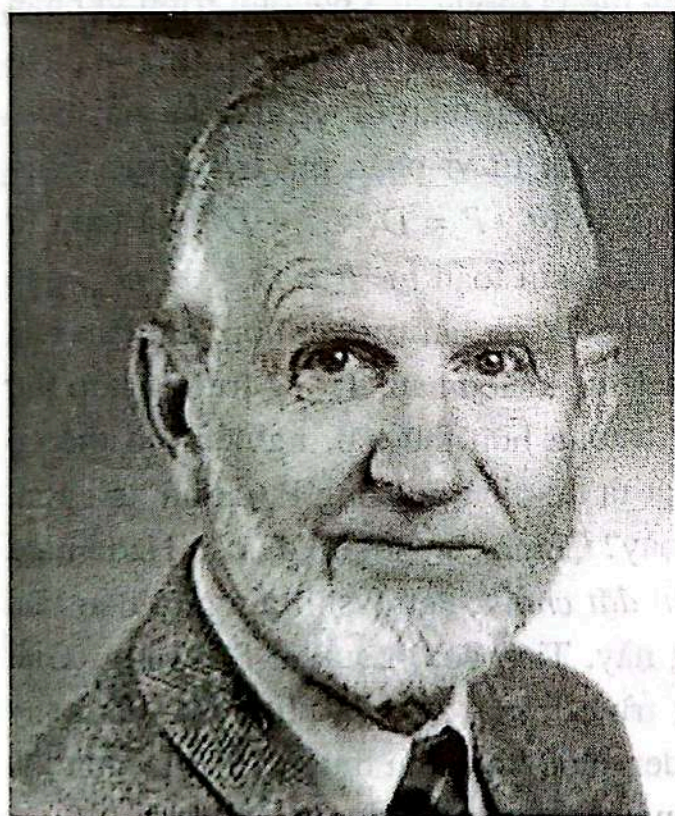
LARS HORMANDER

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1962



Lars Hormander được trao Giải thưởng Fields vì những đóng góp xuất sắc trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng.

Hormander sinh ngày 24 tháng 1 năm 1931, trong một làng chài nhỏ ở miền nam Thụy Điển, nơi cha ông làm giáo viên. Sau khi tốt nghiệp tiểu học ở trường làng, ngày ngày ông đi tàu hỏa để theo học ở thị trấn gần đấy, rồi đến Lund để học trung học như các anh chị của ông. Tuy nhiên, ông may mắn hơn họ, vì khi ông vào trường thì chương trình được “giảm tải” từ ba năm xuống còn hai năm, với chỉ ba tiết học một ngày. Ông cảm thấy sung sướng vì có nhiều thời gian rỗi để tự học. Ở trường, ông được học với một phó giáo sư về toán đến từ đại học Lund. Người thầy đó đã khuyến khích ông đọc sách toán theo chương trình đại học, và ông theo lời khuyên của thầy, vào học tại đại học Lund sau khi tốt nghiệp trung học vào năm 1948.



Năm 1950, Hormander nhận bằng Thạc sĩ, và bắt đầu làm nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của Marcel Riesz, một trong những chuyên gia nổi tiếng về giải tích thời đó. Lúc này, Riesz đang chuẩn bị nghỉ hưu (ông nghỉ hưu vào năm 1952), và kể từ năm 1948, ông không giảng về Phương trình đạo hàm riêng, là ngành mà ông vừa có những đóng góp quan trọng, mà về môn ông quan tâm trước đây là giải tích điều hoà và lý thuyết hàm cổ điển. Do đó, những nghiên cứu đầu tiên của Hormander thuộc lĩnh vực này. Ông nói rằng, điều đó cũng giúp ích cho ông rất nhiều về sau, khi nghiên cứu phương trình đạo

hàm riêng. Sau khi Riesz nghỉ hưu, hai giáo sư mới được bổ nhiệm ở Lund đều thuộc chuyên ngành phương trình đạo hàm riêng: đó là Lars Garding và Ake Pleijel.

Trong các năm 1953-1954, Hormander thực hiện nghĩa vụ quân sự. Thời gian ở quân đội, ông tham gia nghiên cứu kỹ thuật quân sự, và do đó vẫn có điều kiện tiếp tục nghiên cứu toán học. Bởi vậy, năm 1955, Hormander hoàn thành luận án

tiến sĩ toán học về phương trình đạo hàm riêng, khi ông mới tròn 24 tuổi. Các kết quả trong luận án của Hormander là sự mở rộng đáng kể luận án của Malgrange, với sự kết hợp các kỹ thuật về toán tử hyperbolic của Leray và Garding. Ít lâu sau, ông có chuyến thăm đầu tiên đến Mỹ, làm việc tại các trường đại học Chicago, Kansas và Minnesota, và ở Viện toán học tại New York do Courant lãnh đạo (bây giờ mang tên là Viện Courant). Kết thúc đợt làm việc tại Mỹ, ông nhận được ghế giáo sư tại đại học Stockholm. Ông giảng dạy ở đó cho đến năm 1964.

Hormander kể lại rằng, ông hết sức ngạc nhiên khi thấy được trao Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học thế giới năm 1962 ở Stockholm. Tuy nhiên, trong lời giới thiệu Hormander tại đại hội, Garding cho rằng Hormander đã thu được những kết quả sâu sắc và quan trọng nhất trong một hướng nghiên cứu thu hút rất nhiều tên tuổi lớn. Đó là vấn đề tính chất nghiệm của toán tử vi phân đạo hàm riêng. Ta biết rằng, hầu hết hiện tượng tự nhiên có thể mô tả thông qua phương trình vi phân đạo hàm riêng. Cauchy và Kovalevskaja đã chứng minh rằng, phương trình vi phân tuyến tính $Pu=v$ có nghiệm giải tích địa phương nếu toán tử P và v là giải tích. Tuy nhiên, định lý đó không phân biệt các toán tử vi phân mà trên thực tế có những tính chất rất khác nhau. Chẳng hạn toán tử $P = D_1^2 + \dots + D_n^2$ là toán tử Laplace, xuất hiện trong lý thuyết thế vị, trong khi toán tử $P = D_1^2 - \dots - D_n^2$ gặp phải khi nghiên cứu phương trình truyền sóng. Trong hai trường hợp, nghiệm của phương trình $Pu = 0$ có những tính chất hết sức khác nhau. Trong trường hợp thứ nhất, nghiệm là giải tích thực, còn trong trường hợp thứ hai, nghiệm có thể có những kỳ dị phức tạp. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là: điều gì trong P (chính xác hơn, tính chất nào của P) làm nên sự khác biệt này? Chính câu hỏi đó đã dẫn Hadamard đến khái niệm quan trọng là *bài toán biên đặt chỉnh*. Petrovski là người đầu tiên có những kết quả quan trọng theo hướng này. Tiếp đến, Laurent Schwartz (Giải thưởng Fields năm 1950) đã xét phương trình trong đó u là phân bố (hàm suy rộng). Và như Garding nhận xét, Hormander được trao Giải thưởng Fields chính vì đã thu được những kết quả cơ bản nhất trong bài toán quan trọng nêu trên.

Năm 1963 Hormander nhận được lời mời hấp dẫn làm giáo sư của Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton. Ông nói rằng, mặc dù đã có ý định sẽ không rời Thụy Điển, ông không thể nào cưỡng nổi một cơ hội được giành hết thời gian cho công tác nghiên cứu trong một môi trường tuyệt vời như ở Princeton. Mọi quan tâm chính của Princeton hoàn toàn không phải là giải tích, và Hormander xem đó như một cơ hội để ông mở rộng hướng nghiên cứu của mình. Tuy nhiên sau hai năm,

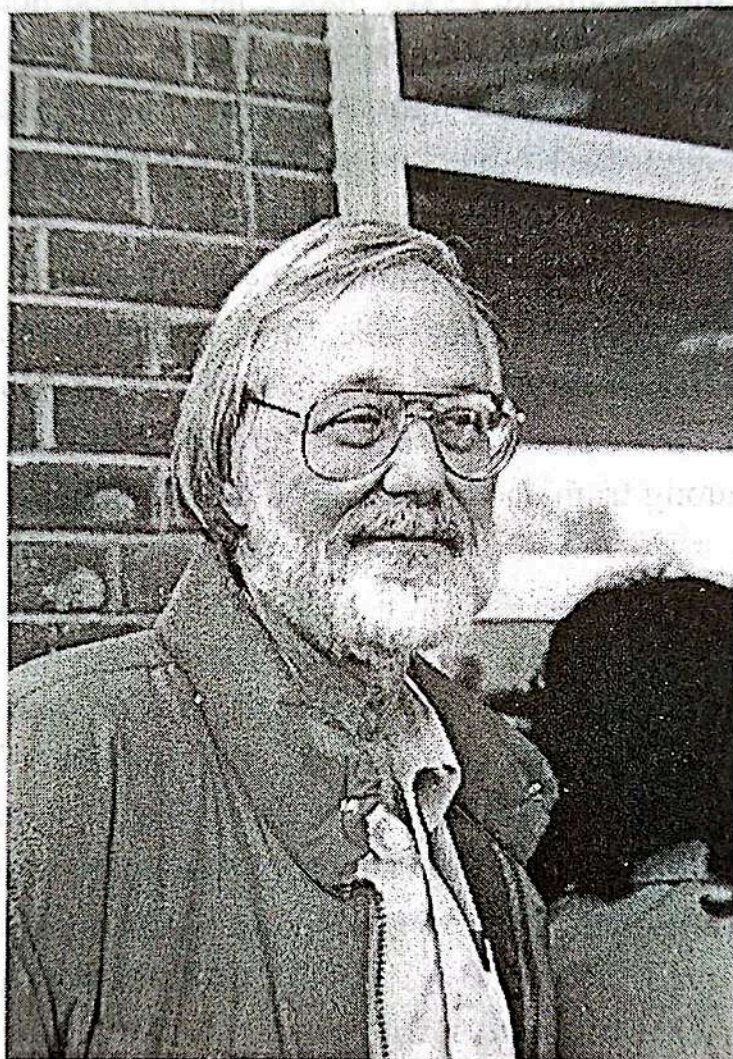
ông tự cho là không thu được những kết quả tâm cỡ như ý muốn, và cảm thấy sức ép tâm lý nặng nề. Vì thế, khi xuất hiện khả năng nhận một ghế giáo sư ở Lund vào năm 1967, ông quyết định sẽ rời Viện Princeton vào mùa thu 1968 để trở về Thụy Điển. Ông kể lại rằng, sau khi quyết định, ông cảm thấy hết sức thoải mái, và trong năm còn lại ở Princeton, ông nhận được kết quả hay nhất trong thời gian làm việc tại Viện!

Như vậy là sau hai mươi năm, kể từ khi bước chân vào đại học Lund năm 1948, Hormander đã khép kín một vòng tròn vào năm 1968 khi trở về Lund làm giáo sư. Ông làm việc ở đó cho đến 1996 thì nghỉ hưu. Trong khoảng thời gian làm giáo sư ở Lund, cũng có lúc ông rời đến Stockholm làm Viện trưởng Viện Mittag-Leffler (1984-1986) hoặc thỉnh giảng ở Mỹ.

Hormander không chỉ nổi tiếng về những công trình nghiên cứu trong phương trình đạo hàm riêng và giải tích phức nhiều biến, ông còn được biết đến với hai cuốn sách tuyệt vời *“Toán tử vi phân tuyến tính với hệ số hằng”* và *“Nhập môn giải tích phức nhiều biến”*. Hai cuốn sách đó đã trở thành kinh điển với những ai nghiên cứu trong phương trình đạo hàm riêng và giải tích phức.

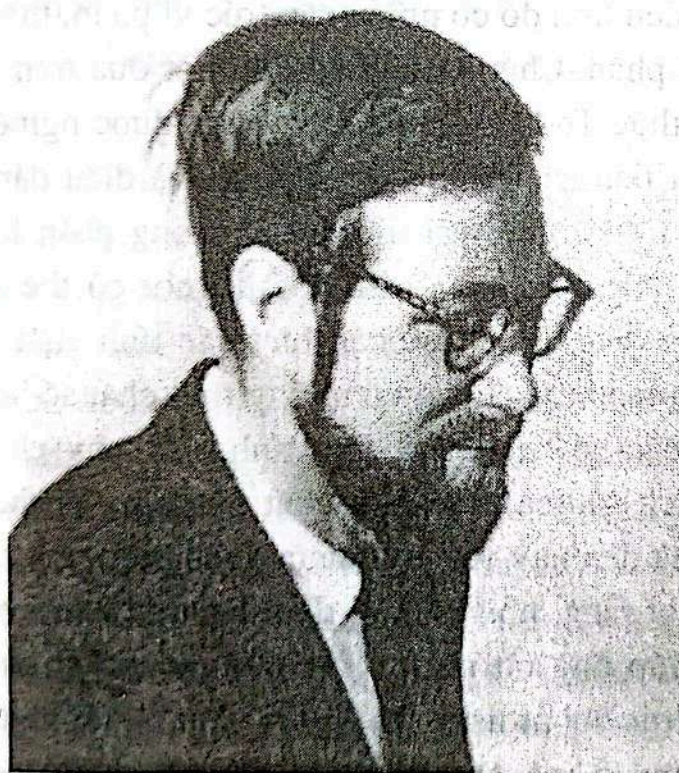
JOHN WILLARD MILNOR

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1962



John Milnor nổi tiếng về những công trình trong lĩnh vực tôpô vi phân, K -lý thuyết, và thời gian gần đây là lý thuyết các hệ động lực một chiều.

Ông sinh ngày 20 tháng 2 năm 1931 ở Orange, New Jersey, Mỹ. Milnor thể hiện tài năng toán học khá sớm. Khi còn là sinh viên của trường đại học Princeton, ông đã hai năm liền (1949, 1950) được giải của cuộc thi Putnam (William Lowell Putnam Mathematical Competition) giành cho sinh viên đại học. Tốt nghiệp Đại học Princeton năm 1951, ông được nhận ngay làm nghiên cứu sinh, và trước khi bảo vệ luận án tiến sĩ một năm, năm 1953, ông chính thức được nhận làm giảng viên khoa toán của Princeton. Năm 1954 Milnor bảo vệ luận án tiến sĩ với đề tài *Đồng luân của các nút*, dưới sự hướng dẫn của Ralph Fox. Ông làm việc tại Princeton từ 1955 đến 1959 với sự tài trợ của một quỹ rất danh giá là Quỹ Alfred P Sloan⁸. Milnor được phong giáo sư của Đại học Princeton năm 1960.



Trong những năm của thập niên 50, Milnor nghiên cứu các đối tượng hình học (mà ông gọi là *rất đơn giản*): các đa tạp $2n$ chiều, $(n-1)$ -liên thông. Đối với những đa tạp như vậy, có một thông tin quan trọng là số Betti. Đó là một đặc trưng tôpô, nhưng cũng chứa nhiều thông tin số học của đa tạp. Milnor nhận thấy rằng, có thể nhận được các đa tạp đó (sai khác một phép đồng luân) bằng cách “dán” các quai $2n$ -chiều vào một chùm mặt cầu n -chiều (số mặt cầu của chùm được xác định bởi số Betti thứ n). Khi xét vấn đề trên cho các mặt cầu 7 chiều,

ông tin rằng ông có thể tìm ra một phản ví dụ cho giả thuyết nổi tiếng của Poincaré. Cách đây khoảng 100 năm, Poincaré phát biểu một giả thuyết nói rằng,

⁸ Quỹ Alfred P. Sloan là một tổ chức phi-lợi nhuận, thành lập năm 1934 bởi Alfred Pritchard Sloan, khi đó là Chủ tịch và Giám đốc điều hành của hãng General Motors. Quỹ Alfred Sloan tài trợ cho các ngành: khoa học và công nghệ, kinh tế, giáo dục.

các đa tạp n chiều, đồng điều với mặt cầu n chiều thì cũng đồng phối với nó⁹. Ông phát biểu cho trường hợp 3 chiều ($n = 3$), nhưng tin rằng, điều này đúng cho đa tạp có số chiều tùy ý, hơn thế nữa, không chỉ là “đồng phối”, mà còn “vi phối”, tức là cấu trúc vi phân trên đó cũng đẳng cấu. Milnor đã làm giới toán học kinh ngạc khi ông chứng minh sự tồn tại nhiều cấu trúc vi phân khác nhau trên mặt cầu 7 chiều. Trước đó, trên tinh thần của giả thuyết Poincaré, người ta cho rằng trên một đa tạp chỉ tồn tại nhiều nhất là một cấu trúc vi phân. Chứng minh của Milnor không phải là một chứng minh xây dựng, tuy nhiên về sau, Brieskorn chỉ ra rằng, có thể xây dựng tường minh các cấu trúc vi phân như thế. Theo Thom, công trình của Milnor cho thấy trực giác không phải bao giờ cũng đúng: tồn tại các mặt cầu 7 chiều mà không là biên của hình cầu 8 chiều nào cả! (trong không gian 3 chiều thì mặt cầu hai chiều là biên của hình cầu ba chiều). Công trình của Milnor đã mở ra một hướng mới trong tô pô vi phân. Về sau, Donaldson (Giải thưởng Fields 1986) chứng minh rằng, tồn tại các đa tạp 4 chiều trên đó có nhiều cấu trúc vi phân, thậm chí tồn tại một số đếm được cấu trúc vi phân. Chứng minh của Milnor dựa trên lý thuyết cobordism của Thom, và các đa thức Todd. Các đa thức Todd được nghiên



Bà Milnor

cứu lần đầu tiên trong hình học đại số, và điều đáng ngạc nhiên là nó đóng vai trò cơ bản trong phân lớp các đa tạp. Nguyên nhân của việc Milnor có thể sử dụng các đa thức Todd để phân biệt các tính chất vi phân của đa tạp là vì chúng có những tính chất số học thông qua các số Bernoulli. Các tính chất này phản ánh một cách sâu sắc các tính chất vi phân, và theo một cách mà đến nay vẫn còn chưa được hiểu thật rõ. Milnor kể lại rằng, những buổi thảo luận của ông với Thom đã giúp ông rất nhiều. Theo Milnor, trực giác về các cấu trúc cobordism của Thom vượt xa rất nhiều so với những gì mà ông đã công bố. Chính từ một buổi thảo luận như vậy mà Milnor đã nghĩ ra phương pháp để nhận được một đa tạp từ đa tạp khác thông qua một chuỗi các biến dạng cầu (thực hiện được khi và chỉ khi hai đa tạp cùng lớp cobordism).

⁹ Giả thuyết Poincaré được Perelman chứng minh năm 2004, và nhờ đó ông được trao Giải thưởng Fields năm 2006.

Hiện nay, Milnor quan tâm nhiều đến lý thuyết các hệ động lực, đặc biệt là các hệ động lực chỉnh hình. Tầm quan trọng của lý thuyết các hệ động lực thì mọi người đã biết từ lâu, ít nhất là sau những công trình của Poincaré. Điều đó cũng dễ hiểu, vì các hiện tượng của tự nhiên và xã hội thường phát triển theo các quy luật đơn giản, nhưng lặp lại nhiều lần. Những quá trình như vậy được mô tả bằng các hệ động lực. Điều đáng ngạc nhiên là ngay với những hệ động lực đơn giản nhất, chẳng hạn mô tả bởi hàm một biến phức $z^2 + c$, vấn đề cũng không đơn giản. Khi $c > 2$, xuất phát từ một giá trị nào đó của z và lặp theo công thức nêu trên khoảng 10 lần, ta thu được một phân tử mà độ lớn (môđun) của nó có thể nhiều như số mét từ trái đất đến một thiên hà xa xôi! Với những giá trị c khác, ta lại có thể chỉ “loanh quanh” trong một khoảng chật hẹp nào đó (trong một tập compact). Vì thế, các hệ động lực đơn giản nhất đã là đối tượng nghiên cứu đầy bí ẩn. Hơn nữa, nhiều vấn đề của thực tiễn dẫn đến việc xét các hệ động lực. Có thể xem Milnor chính là người phát hiện ra sự phong phú của các hệ động lực phức một chiều. Peter Makienko đã viết về các công trình của Milnor trong lĩnh vực đó như sau:

Cho đến nay đã rõ ràng rằng, các hệ động lực chiều thấp, được phát triển mạnh mẽ khởi đầu từ các công trình của Milnor, là một phần cơ bản của lý thuyết các hệ động lực tổng quát. Milnor để mắt đến lý thuyết các hệ động lực vào khoảng giữa những năm 1970. Vào thời gian này, chương trình của Smale trong hệ động lực đã được hoàn tất. Cách tiếp cận của Milnor, ngay từ đầu, xuất phát từ việc tìm những họ không tầm thường đơn giản nhất của các ánh xạ. Lựa chọn đầu tiên, các hệ động lực một chiều, trở thành đối tượng nghiên cứu trong công trình chung của ông với Thurston. Ngay trường hợp ánh xạ unimodal, tức là ánh xạ với chỉ một điểm tới hạn duy nhất, kết quả đã cực kì phong phú. Công trình này có thể so sánh với công trình của Poincaré về vi phân đường tròn, công trình mà 100 năm trước đây đã khai sinh lý thuyết định lượng các hệ động lực. Công trình của Milnor đã mở ra nhiều hướng mới trong lĩnh vực này, cho chúng ta nhiều quan điểm cơ bản, những vấn đề gợi mở và những định lý đẹp đẽ.

Trong các công trình về hệ động lực phức, Milnor sử dụng rất nhiều phương pháp của nhiều lĩnh vực toán học: tôpô vi phân, giải tích phức, giải tích hàm, mô hình hoá bằng máy tính.

Milnor nhận được nhiều giải thưởng. Ông nhận Giải thưởng quốc gia về khoa học năm 1967, được bầu làm Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học quốc gia, Viện hàn lâm

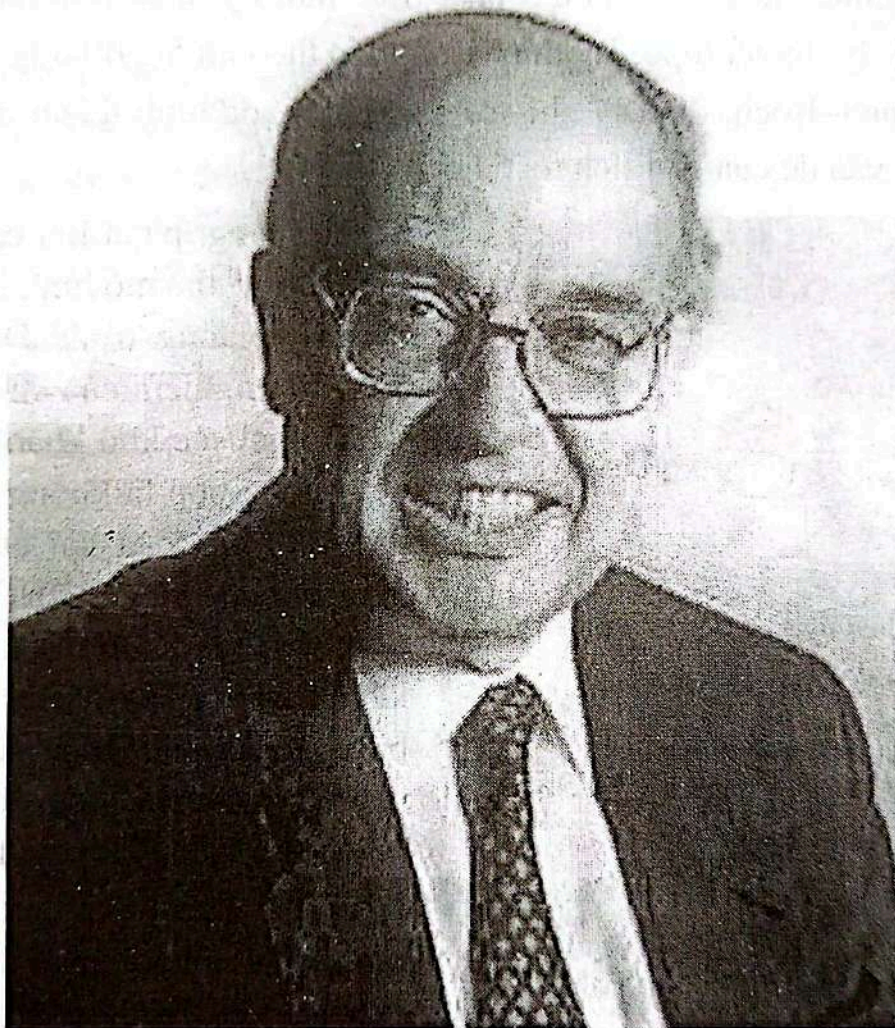
nghệ thuật và khoa học Mỹ. Ông là hội viên Hội triết học Mỹ và đóng vai trò quan trọng trong Hội toán học Mỹ. Năm 1982 Milnor nhận Giải thưởng Leray P. Steele nhờ một công trình có tầm quan trọng cơ bản và trường cứu “Về các đa tạp đồng phôi với mặt cầu 7 chiều”, *Annals of Mathematics* 64 (1956), 399–405.

Trong nhiều công việc ông làm cho toán học, có công tác xuất bản: ông ở trong Ban biên tập tạp chí *Annals of Mathematics*, tạp chí hàng đầu của toán học, từ năm 1962. Từ 1988 ông làm giáo sư ở Đại học quốc gia New York tại Stony Brook. Vợ ông, Dusa McDuff cũng là một giáo sư nổi tiếng cùng trường.

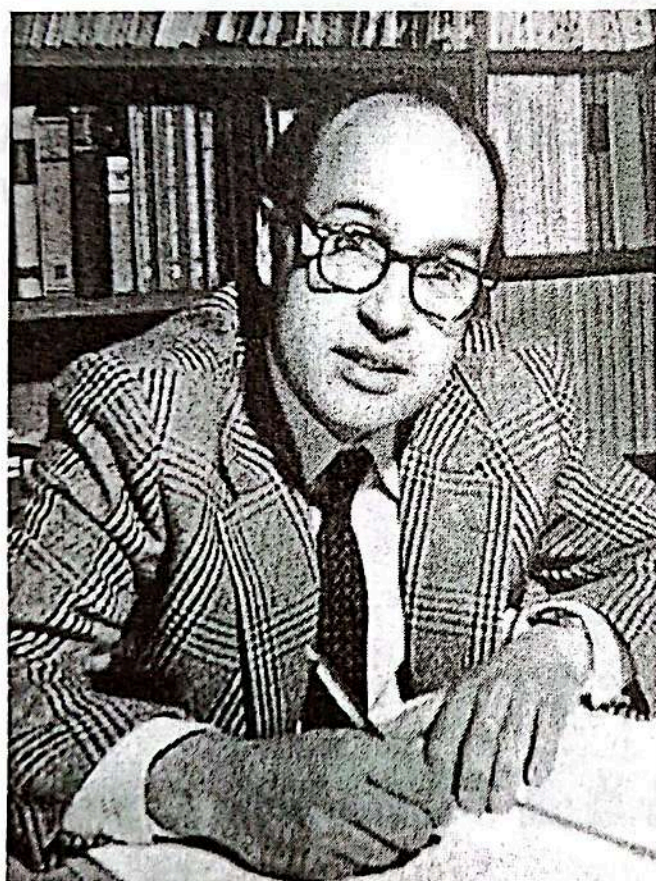
Milnor viết rất nhiều cuốn sách, nổi tiếng bởi sự trình bày sâu sắc và đặc biệt sáng sủa các vấn đề khó nhất của toán học: *Lý thuyết Morse (Morse Theory)*, *Các lớp đặc trưng (Characteristic Classes)*, viết cùng với Stasheff), *Định lý h -Cobordism (The h -Cobordism Theorem)*, *Động lực một biến phức (Dynamics in One Complex Variable)*, *Điểm kì dị của các siêu mặt phức (Singular Points of Complex Hypersurfaces)*, *Tô pô từ quan điểm khả vi (Topology from the Differentiable Viewpoint)*.

MICHAEL FRANCIS ATIYAH

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1966



Nhắc đến Atiyah, không ai là không nhớ đến “Định lý chỉ số Atiyah–Singer”, một trong những định lý có vai trò quan trọng nhất của toán học. Tuy nhiên, để hiểu vì sao Atiyah đi đến định lý đó, phải tìm đến những công trình “đầu tay” của ông, khi Atiyah chỉ ra rằng việc nghiên cứu phân thứ vectơ trên không gian có thể đưa về nghiên cứu một lý thuyết đối đồng điều. Những công trình đầu tiên đó của Atiyah là đóng góp to lớn vào những vấn đề của toán học xoay quanh mối quan hệ giữa hình học và giải tích. Cùng với Hirzebruch, và được khích lệ bởi K–lý thuyết đại số của Grothendieck, Atiyah đã phát triển một kỹ thuật mới rất mạnh trong tôpô, gọi là K–lý thuyết tôpô. Lý thuyết đó, tiếp theo những định lý nổi tiếng như định lý Riemann–Roch, định lý chỉ số Hirzebruch, đã hình thành một cách nhìn mới lên nhiều vấn đề của giải tích toán học.



Ta biết rằng, phần lớn các hiện tượng tự nhiên có thể mô hình hoá thông qua các hệ phương trình đạo hàm riêng. Việc tìm nghiệm của chúng luôn luôn là điều hết sức khó khăn, và trong hầu hết trường hợp là không thể thực hiện được. Vì thế, câu hỏi quan trọng cần nghiên cứu trước tiên là : Liệu hệ phương trình đó có tồn tại nghiệm hay không, và có bao nhiêu nghiệm? Đặc biệt, nếu ta biết được số nghiệm của phương trình thì điều đó giúp ích rất nhiều cho việc giải phương trình. Định lý chỉ số Atiyah–Singer ra đời nhằm trả lời câu hỏi đó. Thực ra, ngay từ năm 1960, I. Gelfand, nhà toán học nổi tiếng người Nga, đã đưa ra giả thuyết

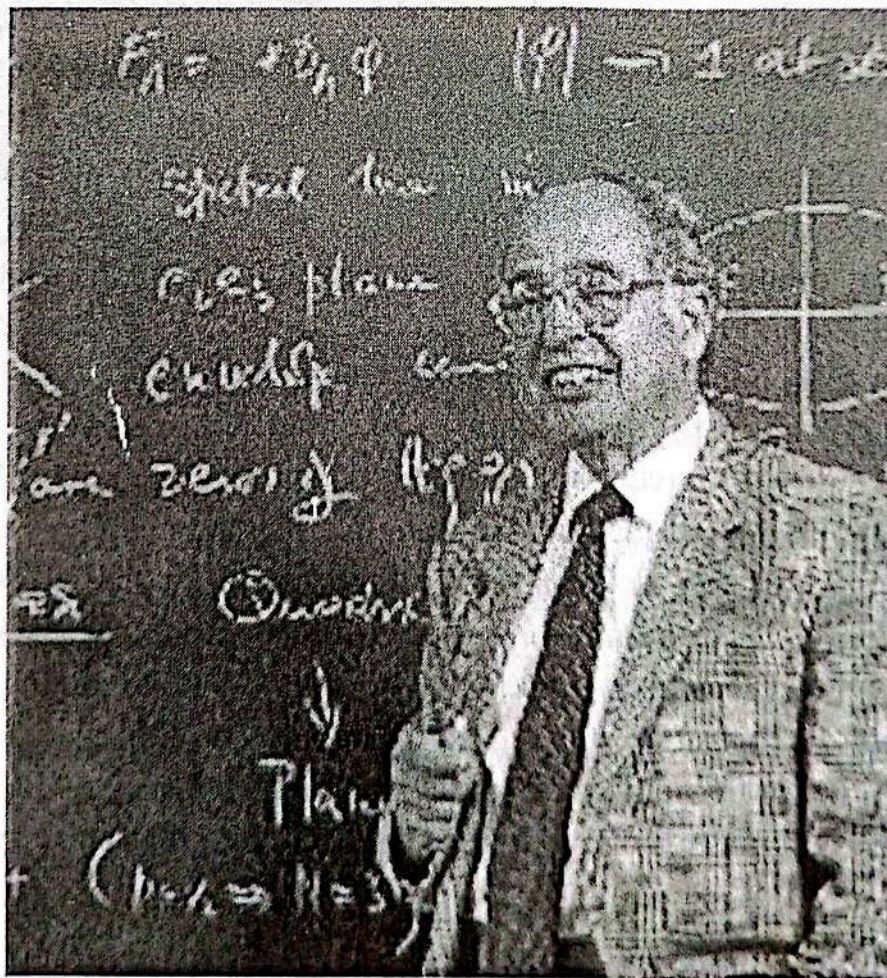
rằng, số nghiệm của một hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng có thể được mô tả một cách “thuần túy tôpô”. Tuy nhiên, phải đợi đến Atiyah và Singer thì ý tưởng đó mới được thể hiện qua công thức toán học. Nói một cách nôm na, Định lý chỉ số Atiyah–Singer là công thức cho thấy “chỉ số giải tích” của một hệ phương trình đạo hàm riêng bằng “chỉ số tôpô” của nó. Điều này có nghĩa là, số tham số dùng để mô tả các nghiệm của một hệ phương trình đạo hàm riêng có thể tính qua một số bất biến tôpô như lớp Chern, lớp Todd. Định lý chỉ số đã trở thành cầu nối quan

trọng giữa hình học vi phân, tôpô và giải tích. Khi kết hợp với việc xét tính đối xứng, Định lý chỉ số đã dẫn đến những định lý về điểm bất động rất tinh tế và có ứng dụng rộng rãi. Người ta nói rằng, Atiyah đã dựng nên một cây cầu mới nối toán học và vật lý. Theo nhận xét của Atiyah, tính đối xứng có vai trò quan trọng cả trong toán học và vật lý, vì nhờ nó mà người ta giảm được đáng kể các tham số khi xây dựng phương trình, giúp cho các phương trình mô tả những hiện tượng vật lý trở nên đơn giản hơn nhiều. Chính Atiyah cho rằng, không nên gọi đó là “định lý chỉ số” mà phải gọi là “lý thuyết chỉ số”, vì tính tổng quát và tầm quan trọng của nó. Để xây dựng và hoàn thiện lý thuyết đó, Atiyah đã bỏ ra khoảng 30 năm lao động miệt mài, trong đó có khoảng 25 năm cùng cộng tác với Singer. Ông tự đánh giá rằng, đó là thành tựu đẹp nhất trong sự nghiệp của ông, và họ đã đi đến thành tựu đó giống như những người leo núi vất vả vượt qua những con đường chông gai, nguy hiểm, và bỗng thấy một bình nguyên rộng lớn mở ra trước mắt mình. Khi người ta hỏi ông, nguyên nhân nào đã dẫn ông đến với lý thuyết chỉ số, ông trả lời rằng toán học phát triển theo một con đường liên tục, trong đó không có thành tựu nào xuất phát từ con số không, và có thể nói rằng, lý thuyết chỉ số có mầm mống trong những công trình của Aben. Tuy nhiên, các định lý thường không đi theo những con đường mà suy luận logic dẫn các bạn đến! Chúng thường xuất hiện một cách bất thường hơn nhiều, và nhiều khi là để trả lời những câu hỏi nào đó. Người ta thường tìm cách lý giải sự xuất hiện của các định lý một cách hợp lý (việc làm của nhiều nhà nghiên cứu về lịch sử toán học!), và viết lại lịch sử các phát minh cho có vẻ logic, nhưng thực tế diễn ra lại thường là rất khác!¹⁰ Khi nghiên cứu lý thuyết chỉ số, các tác giả của nó đã nghĩ là vấn đề sẽ rất quan trọng cho toán học, tuy nhiên chính họ cũng không ngờ là nó lại có vai trò rất quan trọng đối với vật lý. E. Witten đã sử dụng lý thuyết chỉ số để phát triển “lý thuyết dây”, một lý thuyết có tham vọng mô tả thống nhất thế giới vĩ mô và vi mô, tức là mô tả thống nhất lực hấp dẫn trong những “thước đo” rất lớn của thuyết tương đối, với các lực điện từ, trong những thước đo rất nhỏ của cơ học lượng tử. Điều thú vị là chính các tư tưởng trong vật lý cũng tác động lại sự phát triển của lý thuyết chỉ số: Simon Donaldson, một học trò của Atiyah (Giải thưởng Fields 1986) đã sử dụng những nghiên cứu về các hạt “instanton” với thời gian sống cực ngắn để phát minh ra nhiều tính chất mới, rất đặc biệt của không gian khả vi bốn chiều. Lý thuyết chỉ số một lần nữa cho thấy mối liên quan mật thiết giữa toán học và vật

¹⁰ Quan điểm đó của Atiyah có lẽ là đúng với các phát minh lớn mang tính cách mạng. Còn các “phát minh” nhỏ nói chung đúng là sản phẩm của sự suy luận logic từ những kết quả đã biết!

lý, kể từ thời Galileo nói rằng, *tự nhiên viết các quy luật của mình bằng ngôn ngữ của toán học*.

Thành công của Atiyah và Singer trong việc chứng minh định lý chỉ số còn là một mẫu mực của tinh thần hợp tác khoa học. Nếu Atiyah là một chuyên gia hàng đầu về hình học đại số và tôpô, thì Singer là lại là người rất mạnh về giải tích và hình học vi phân, và cũng vì thế mà hiểu rất rõ các vấn đề của vật lý. Mỗi khi một trong hai người có ý tưởng nào đó, họ ghi lên bảng đen, và cùng nhau thảo luận để đi đến kết quả. Vì thế định lý chỉ số mang tên hai người: định lý Atiyah–Singer. Tuy nhiên, trong khi nhấn mạnh vai trò ngày càng tăng của hợp tác tập thể trong toán học, Atiyah cũng đồng thời nói rằng, lao động toán học có cái đặc thù riêng của nó. Điều may mắn cho toán học là không ai giống ai: có những nhà toán học như Perelman (người Nga) tự cô lập mình trong nhiều năm liền, để xuất hiện lại trong cộng đồng với một thành công vang dội: chứng minh giả thuyết Poincaré. Theo Atiyah, toán học đẹp chính một phần vì các nhà toán học không “đăng cấu” với nhau, mà họ lập thành một “đa tạp”, và điều đó rất có lợi cho toán học, vì “các đỉnh núi khác nhau cần đến những kỹ thuật khác nhau để chinh phục”.



Một bài giảng của Atiyah

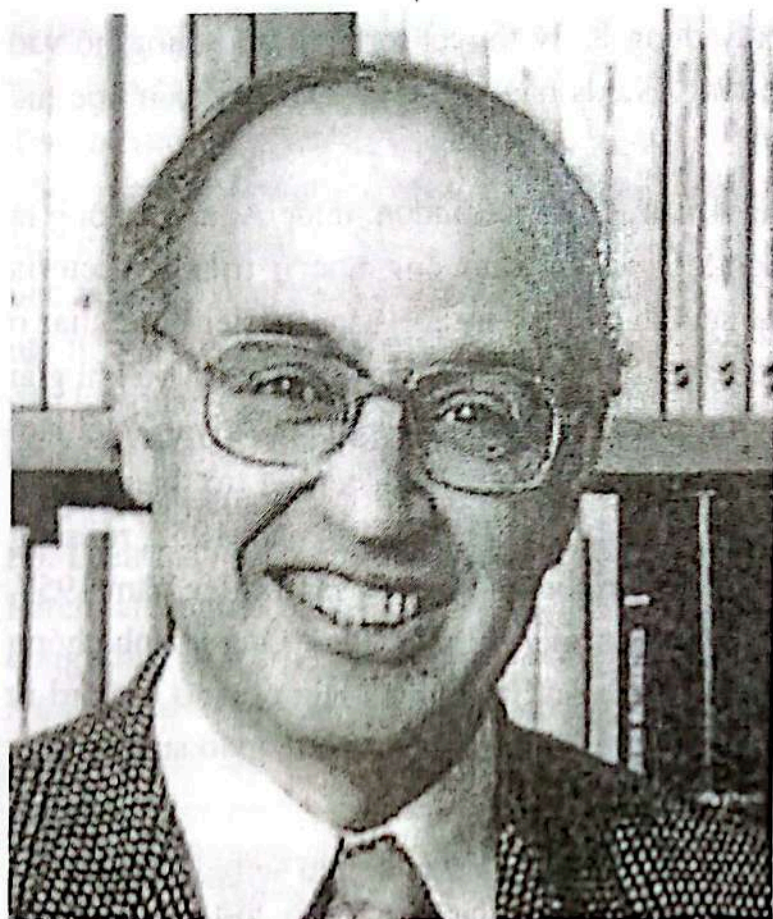
Nhờ những thành tựu trong việc xây dựng K-lý thuyết tôpô và ứng dụng nó vào giải tích, Atiyah được trao Giải thưởng Fields năm 1966 tại Đại hội toán học thế giới ở Matxcova.

Michael Atiyah sinh ngày 22 tháng 4 năm 1929 ở London, nước Anh. Cha ông là người Li Băng, mẹ ông người Scotlen. Thuở nhỏ ông học ở trường Victoria College ở Cairo, thủ đô Ai Cập, về sau chuyển về trường Manchester Grammar ở Manchester, nước Anh. Tốt nghiệp trung học, ông đi nghĩa vụ quân sự, và khi giải ngũ thì vào học ở Trinity College, Cambridge. Sau khi tốt nghiệp, Atiyah ở lại làm nghiên cứu sinh ở Cambridge dưới sự hướng dẫn của Hodge. Ông trở thành thành viên của Trinity College năm 1954, và nhận học vị Tiến sĩ ở đó năm 1955, rồi sang làm việc tại Viện nghiên cứu cao cấp của Princeton. Trở về Cambridge năm 1957, ông làm việc tại đó cho đến 1961 thì về làm giáo sư ở Oxford. Ông nhanh chóng được bổ nhiệm một chức vụ cao quý là Giáo sư Savilian về Hình học ở Oxford từ năm 1963, và giữ ghế đó cho đến năm 1969, khi ông nhận chức giáo sư toán học tại Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton.

Làm việc ở Princeton ba năm, Atiyah trở về Anh, trở thành giáo sư nghiên cứu của Hoàng gia ở Oxford. Oxford đã giữ chân ông đến tận năm 1990, khi ông được bổ nhiệm làm Giám đốc của Trinity College ở Cambridge, và là Viện trưởng đầu tiên của Viện Isaac Newton về các khoa học toán học, lúc bấy giờ mới được thành lập ở Cambridge.

Trong đời hoạt động khoa học của mình, ngoài Giải thưởng Fields, Atiyah nhận được rất nhiều giải thưởng và sự tôn vinh khác, mà ta chỉ có thể liệt kê ở đây một số trong đó. Ông được bầu làm Viện sĩ Hoàng gia năm 1962, khi mới 33 tuổi, nhận được Huy chương Hoàng gia năm 1968, Huy chương Copley năm 1988. Ông được mời làm Bài giảng Hội Hoàng gia về Hình học toàn cục năm 1975, và là Chủ tịch Hội Hoàng gia từ năm 1990 đến năm 1995. Ông còn nhận được Feltrinelli Prize của Accademia Nazionale dei Lincei (Viện hàn lâm quốc gia Lincei) năm 1981, Giải thưởng quốc tế Vua Faisal về khoa học năm 1987 (và là người đầu tiên có vinh dự nhận giải thưởng này), Huy chương Benjamin Franklin và Huy chương Nehru. Năm 2004, cùng với Singer, ông vinh dự nhận Giải thưởng Abel.

Atiyah là Chủ tịch Hội toán học London các năm 1974–1976, được tặng Huy chương De Morgan năm 1980. Ông được phong tước Hiệp sĩ năm 1983 và được tặng Bội tinh năm 1992.



Atiyah là Viện sĩ của nhiều Viện hàn lâm khoa học nước ngoài, trong đó có Hoa Kỳ, Thụy Điển, Đức, Pháp, Ailen, Ấn Độ, Australia, Trung Quốc, Nga, Ucraina. Nhiều trường đại học tặng ông bằng Tiến sĩ danh dự: Bonn, Warwick, Durham, St Andrews, Dublin, Chicago, Edinburgh, Cambridge, Essex, London, Sussex, Ghent, Reading, Helsinki, Leicester, Rutgers, Salamanca, Montreal, Waterloo, Wales, Queen's-Kingston, Keele, Birmingham, Lebanon và Open University. Atiyah là một

trong những thành viên sáng lập của Viện hàn lâm khoa học thế giới thứ 3.

Ngày nay, ở tuổi 77, Atiyah vẫn là nhà toán học năng động với đầy những tư tưởng mới. Ông nói rằng, bí quyết để có thể giữ được sức làm việc lâu dài là phải luôn luôn tự thay đổi, đa dạng, không được “ôm mãi” một đề tài cho đến khi nhàm chán hoặc kiệt sức.

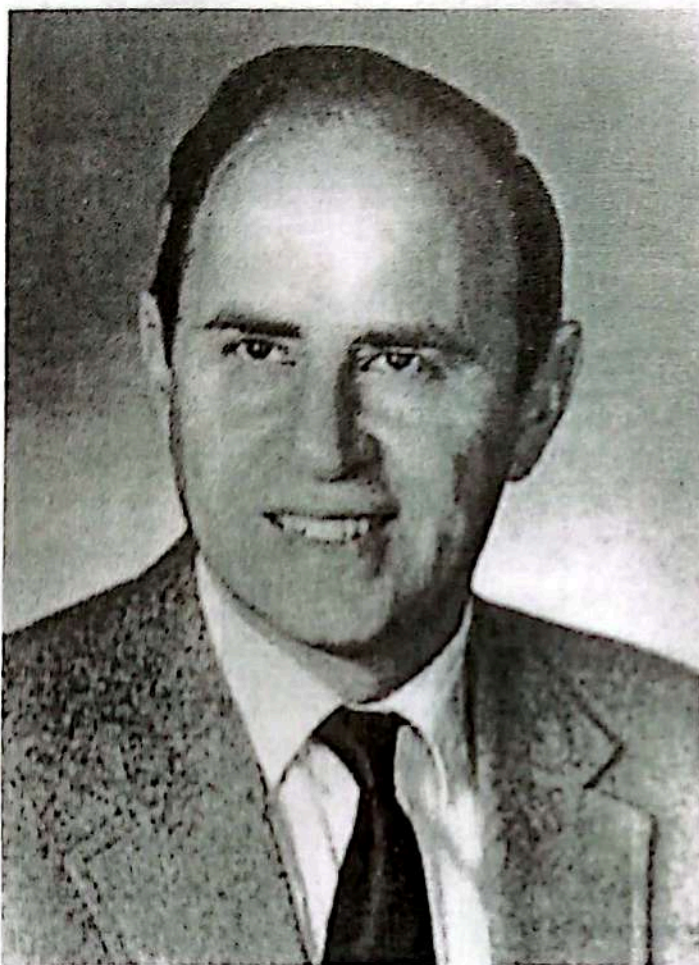
Ngoài toán học, hoạt động yêu thích của ông là dạo chơi trong không khí trong lành của những ngọn đồi ở Cambridge.

PAUL JOSEPH COHEN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1966



Paul Cohen đi vào lịch sử toán học như là một trong những người có đóng góp lớn nhất vào cơ sở của toán học, với việc chứng minh *giả thuyết continuum*, bài toán thứ nhất trong 23 bài toán nổi tiếng của Hilbert.



Cohen sinh ngày 2 tháng 4 năm 1934 tại Long Branch, New Jersey, Hoa Kỳ. Ông từng là sinh viên của Đại học Brooklyn từ 1950 đến 1953. Sau đó, ông học cao học ở Đại học Chicago và nhận bằng thạc sĩ năm 1954. Tiếp tục làm nghiên cứu sinh tại Chicago, ông nhận bằng tiến sĩ năm 1958. Luận án tiến sĩ của ông *Một số vấn đề của lý thuyết duy nhất của các chuỗi lượng giác*, một đề tài thuộc lĩnh vực Số học, được viết dưới sự hướng dẫn của Zygmund.

Năm 1957, trước khi nhận bằng tiến sĩ, Cohen đã được làm phụ giảng tại Đại học Rochester một năm. Sau đó ông làm việc một năm ở Viện công nghệ Massachusetts trong năm học

1958–1959, và từ 1959 đến 1961 là thành viên của Viện nghiên cứu cao cấp Princeton (Institute for Advanced Study).

Năm 1961 Cohen nhận ghế giảng viên ở Đại học Stanford, và trở thành giáo sư ở đó năm 1964. Năm 1966 Cohen được tặng Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học thế giới ở Mátxcova vì công trình cơ bản của ông trong cơ sở của lý thuyết tập hợp.

Cohen đã sử dụng một kỹ thuật gọi là “cưỡng bức” (forcing) để chứng minh tính độc lập trong lý thuyết tập hợp của *tiên đề chọn* và của *giả thiết continuum* mở rộng. Giả thiết continuum là bài toán thứ nhất trong 23 *Bài toán Hilbert* nổi tiếng, được đề xuất trong Đại hội toán học quốc tế lần thứ hai năm 1900. Bài phát biểu nổi tiếng của Hilbert – *Các bài toán của toán học* – đã thôi thúc (cho đến tận ngày hôm nay) các nhà toán học cố gắng giải quyết những vấn đề cơ bản đó và Cohen có vinh dự là người giải được Bài toán số 1.

Có thể mô tả vắn tắt bài toán số 1 của Hilbert như sau: Trong hệ tiên đề của lý thuyết tập hợp, có *tiên đề chọn* nói rằng, với mọi tập hợp X , tồn tại một hàm f sao cho với mọi tập con không rỗng Y của X , $f(Y)$ thuộc Y . Nói một cách nôm na, ta có thể chọn ra trong mỗi tập con không rỗng Y của tập hợp X một phần tử nào đó (ký hiệu là $f(Y)$). Nó được gọi là “tiên đề” vì sự hiển nhiên của nó: tập con không rỗng thì phải chứa ít nhất một phần tử, và ta có thể “chọn” phần tử đó. Tiên đề chọn có vai trò đặc biệt quan trọng trong lý thuyết tập hợp, cũng như trong nhiều lĩnh vực khác của toán học. Một câu hỏi được nhiều người quan tâm là, liệu tiên đề chọn có thể suy ra được từ các tiên đề khác của lý thuyết tập hợp hay không? Nói cách khác, cần xét đến *tính độc lập* của tiên đề chọn. Một vấn đề khác cũng quan trọng không kém trong lý thuyết tập hợp là giả thuyết liên tục (giả thuyết continuum). Đó là giả thuyết nói rằng, giữa các tập hợp vô hạn với lực lượng *đếm được* (chẳng hạn tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số đại số,...), và các tập hợp với lực lượng “continuum” (chẳng hạn tập hợp các điểm trên đường thẳng, tập hợp các điểm trên mặt phẳng,...) không còn tập hợp nào khác với “lực lượng trung gian”, tức là có số phần tử “ít hơn” số các phần tử của tập hợp với lực lượng continuum, nhưng “nhiều hơn” số các phần tử của tập hợp đếm được. Giả thuyết liên tục không có vẻ hiển nhiên lắm, nên có thể nghĩ rằng đó là một “định lý”, tức là phải suy ra được từ các tiên đề của lý thuyết tập hợp. Hilbert đề ra bài toán thứ nhất cho toán học thế kỷ 20: *Chứng minh rằng tiên đề chọn và giả thuyết continuum là độc lập với các tiên đề còn lại của lý thuyết tập hợp*. Đầu những năm 40, Godel, người được tạp chí *Times* bình chọn là nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ 20, đã xây dựng mô hình cho lý thuyết tập hợp gồm các tập “kiến thiết được”, và chứng minh rằng, trong mô hình đó, giả thuyết liên tục và tiên đề chọn đều đúng. Vào giữa những năm 60, Cohen, với khái niệm *cưỡng bức* độc đáo, đã xây dựng được các mô hình của lý thuyết tập hợp, trong đó giả thuyết liên tục không đúng và tiên đề chọn đúng, hoặc cả hai đều không đúng. Như vậy, cùng với kết quả của Godel, công trình của Cohen chỉ ra rằng, tiên đề chọn và giả thuyết liên tục vừa phi mâu thuẫn, vừa độc lập đối với lý thuyết tiên đề về tập hợp. Những kết quả này, về nguyên tắc, có thể cho ta khả năng xây dựng những lý thuyết tập hợp trong đó tiên đề chọn và giả thuyết liên tục là đúng hoặc không đúng, tương tự như ta đã có hình học Euclid và các hình học phi Euclid. Điều này cho ta thấy rõ giá trị to lớn của các kết quả của Cohen.

Giải thưởng Fields không phải là giải thưởng đầu tiên mà Cohen nhận được. Năm 1964, ông nhận được Giải thưởng tưởng nhớ Buecher (Buecher Memorial Prize)

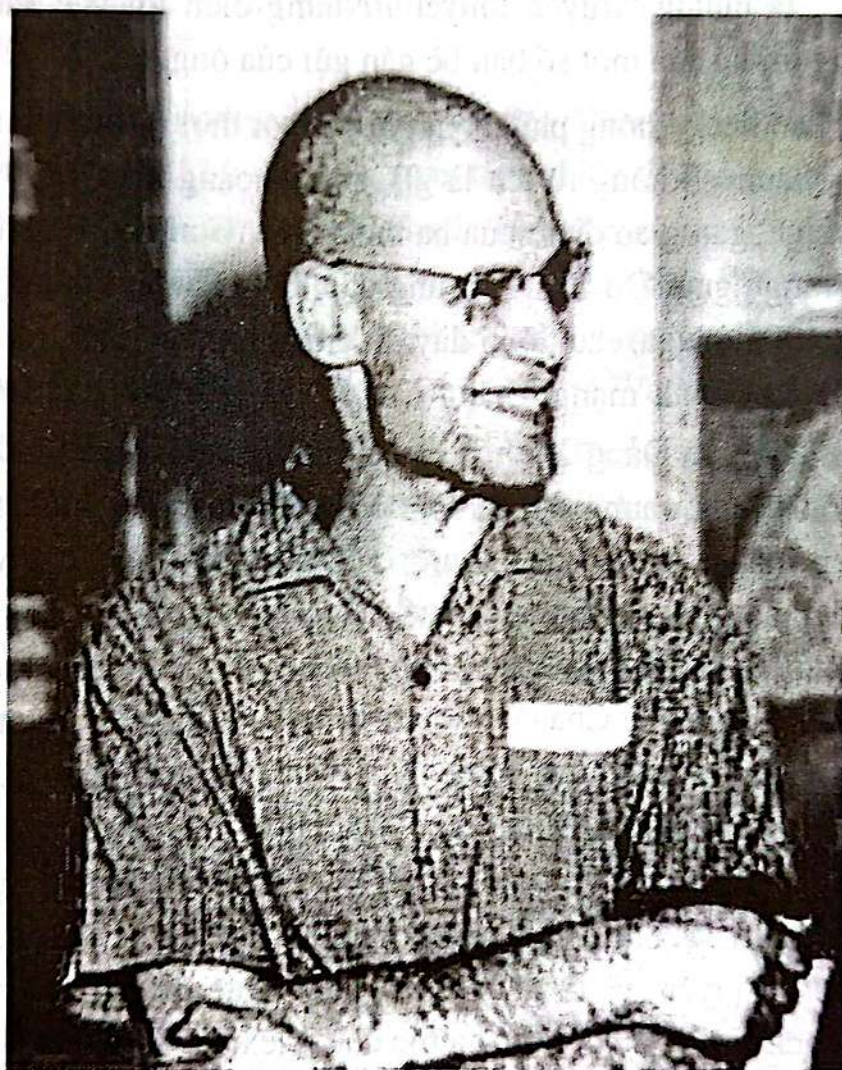
của Hội toán học Hoa Kỳ vì công trình khoa học của ông *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures* (về giả thuyết Littlewood và các độ đo lũy đẳng), đăng trong tạp chí Toán học của Hội toán học Hoa Kỳ (*American Journal of Mathematics* 82 (1960), 191–212.)

Ba năm sau, năm 1967, Cohen nhận được Huy chương Khoa học quốc gia và được bầu vào Viện hàn lâm khoa học Hoa Kỳ.

Ngoài những công trình về số học và lý thuyết tập hợp, Cohen còn có nhiều công trình về phương trình vi phân và giải tích điều hoà.

ALEXANDRE GROTHENDIECK

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1966



Alexandre Grothendieck là một trong những nhà toán học được nhắc đến nhiều nhất của thế kỷ 20. Dĩ nhiên người ta nhắc đến ông trước hết vì những đóng góp to lớn của ông cho toán học, nhưng cũng vì ông là một con người với thiên tài kì lạ, cá tính kì lạ. Mặc dù ông đã viết hơn 1000 trang hồi ký, người ta vẫn biết rất ít về cuộc sống riêng của ông! Bởi thế, nhiều điều trong tiểu sử của ông vẫn còn là bí ẩn, đôi khi chỉ là những “truyền thuyết”. Những điều tôi viết sau đây dựa rất nhiều vào những lời kể của một số bạn bè gần gũi của ông.

Alexandre Grothendieck không phải là người có một thời thơ ấu êm ả và thuận lợi. Cha ông họ là Shapiro (không rõ tên là gì), sinh khoảng năm 1890 trong một thị trấn nhỏ thuộc Nga, gần giao điểm của ba nước Nga, Ucraina, Bêlôruxia. Dòng họ Shapiro gồm những người Do Thái rất sùng đạo. Ông Shapiro tham gia vào phong trào cách mạng 1905 ở Nga, sau đó bị đày đi Xibêri hơn 10 năm trời. Ông được trả tự do năm 1917 khi cách mạng Tháng Mười Nga thành công, và là một trong những nhà lãnh đạo của Đảng Xã hội – cách mạng cánh tả. Lúc đầu ông đi với những người Bôn-sê-vich, nhưng sau đó rời bỏ họ. Thời kỳ này ở Châu Âu có nhiều phong trào cách mạng: Rosa Luxemburg ở Berlin, các Xôviết ở Munich, nhóm cách mạng của Bela Kun ở Hungari. Nước Nga bước vào cuộc nội chiến với sự tham gia của nhiều lực lượng khác nhau, trong đó có phái vô chính phủ do Makhnô cầm đầu ở Ucraina. Cha của Grothendieck tham gia vào tất cả các phong trào đó! Trong những năm 20 ông sống chủ yếu ở Đức, gia nhập các nhóm chính trị, vũ trang của các đảng cánh tả chống lại Hitler và bọn Quốc xã. Tại Đức, Shapiro gặp Hanka Grothendieck, một phụ nữ Do Thái đến từ miền bắc nước Đức. Ngày 28 tháng 3 năm 1928, họ sinh người con trai đặt tên là Alexandre. Chỉ ít lâu sau, Hitler lên cầm quyền, và từ năm 1933, nước Đức trở nên rất nguy hiểm đối với những nhà cách mạng Do Thái. Cha mẹ của Alexandre lánh nạn sang Pháp, để lại con trai mình trong một trường tư thục gần Hamburg. Năm 1936 cuộc nội chiến Tâybannha bùng nổ. Ông Shapiro tham gia trong đoàn quân chống phát xít Franco. Khi những người cộng hoà Tâybannha thất bại, ông bị đưa vào nhà tù ở Vernet, sau đó chuyển về trại tập trung Ausschwitz (theo tiếng Ba Lan là Ôtsovenxim) và chết tại đó năm 1942.

Hanka Grothendieck cùng với con trai Alexandre sống sót một cách may mắn trong một nước Pháp bài Do Thái dưới thời Thống chế Pétanh. Họ được những người kháng chiến theo đạo Tin lành ở Cévennes che chở. Mục sư Trocmé, hiệu trưởng trường Lycée Tin Lành ở Cévennes biến vùng đó thành trung tâm kháng chiến chống bọn chiếm đóng quốc xã. Alexandre Grothendieck được học và sống

ngay trong trường đó. Sau khi nhận bằng Tú tài, anh trở thành sinh viên ở Montpellier. Người ta kể rằng, anh thường vượt xa thầy giáo, và thể hiện một thiên tài toán học hiếm có. Bởi thế, sau hai năm học ở Montpellier, mùa thu năm 1948, anh được các thầy giáo giới thiệu lên Paris theo học ở Ecole Normale Supérieure với Elie Cartan, một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó. Đó là điểm kết thúc thời niên thiếu, và bắt đầu một thời kỳ vinh quang của Grothendieck, từ 1949 đến 1970.

Sau một năm ở Paris, Grothendieck chuyển đến Nancy, làm việc dưới sự hướng dẫn của Dieudonné. Thời kỳ này anh quan tâm nhiều đến Giải tích hàm. Bản luận án tiến sĩ quốc gia "*Tích tensor tôpô và các không gian hạch*" của Grothendieck, bảo vệ năm 1950, đã trở thành kinh điển, và là điểm khởi đầu cho lý thuyết hình học các không gian Banach. Cũng thời kỳ này, Grothendieck gia nhập nhóm Bourbaki, cùng với Henri Cartan, Dieudonné, André Weil và một số người khác¹¹.

Từ năm 1950, Grothendieck nhận được tài trợ của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia Pháp. Ông làm việc ở trường Đại học tổng hợp Sao Paulo (Braxin) trong hai năm 1953–1955, sau đó chuyển về Đại học Kansas (Hoa Kỳ). Chính trong thời kỳ này, mối quan tâm của ông chuyển từ Giải tích hàm sang Tôpô và Hình học. Năm 1956 ông trở về Pháp, làm Nghiên cứu viên của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia Pháp.

Năm 1959 đánh dấu một cái mốc quyết định trong sự nghiệp của Grothendieck. Đó là năm ông nhận một "ghế" ở Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, nổi tiếng với tên gọi tắt là IHES) vừa mới thành lập, đặt tại Bures-sur-Yvette, trong vùng thung lũng Essonne xinh đẹp gần Paris. Người ta thường nói, những năm Grothendieck ở IHES (1959–1970) là những năm vàng (Golden Age) của cuộc đời ông. Tại đây, dưới sự lãnh đạo của Grothendieck đã xuất hiện một trường phái mới của toán học. IHES trở thành trung tâm lớn nhất thế giới về Hình học đại số. Nhờ Grothendieck, Hình học đại số mang một diện mạo mới, sau thời kỳ phát triển hoàng kim của nó với "trường phái Italia" nổi tiếng (với những tên tuổi như Frobenius, Castelnuovo, Fano,...). Cùng với việc đưa vào khái niệm "lược đồ" (Scheme), Grothendieck "đại số hoá" những tư tưởng hình học rục rịch của trường phái Italia, đưa đến cho hình học đại số những công cụ tính toán mạnh mẽ. Hơn thế nữa, các công trình của Grothendieck cho ta khả năng

¹¹ Chúng ta sẽ đề cập nhiều hơn đến nhóm Bourbaki trong cuốn sách này.

nhìn nhận toán học hiện đại trong một thể thống nhất: Các định lý của ông là sự hợp nhất của hình học, số học, tôpô và giải tích phức.

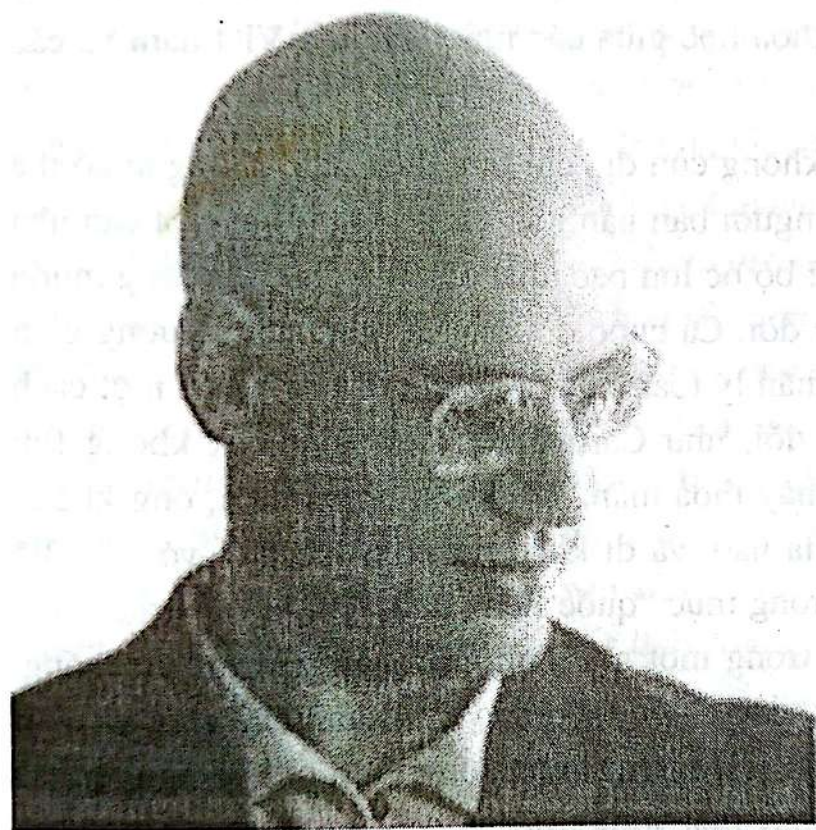
Khó có thể liệt kê hết những gì mà Grothendieck đã mang lại cho toán học. Đó là tích tenxơ tôpô, không gian hạch, đối đồng điều bó như là các hàm tử dẫn xuất, lược đồ, K- lý thuyết, Định lý Grothendieck–Riemann–Roch, định nghĩa đại số của nhóm cơ bản của một đường cong, xác định cấu trúc hình học thông qua các hàm tử, phàm trừ phân thớ, hình thức luận của đối ngẫu địa phương và toàn cục, đối đồng điều étale, đối đồng điều crystalline, mô tả các L-hàm trong ngôn ngữ đối đồng điều, các “môtip”,... Thật khó hình dung được rằng, tất cả những tư tưởng lớn như thế của toán học chỉ xuất hiện trong một cái đầu, và chỉ trong khoảng 10 năm! Điều xuyên suốt trong toàn bộ sự nghiệp của Grothendieck chính là cố gắng của ông nhằm “thống nhất” toàn bộ toán học, xoá nhoà ranh giới giữa hình học, đại số, số học, giải tích. Tư tưởng đó của Grothendieck có ảnh hưởng lớn trong sự phát triển của toán học hiện đại, và được thể hiện trong nhiều công trình của nhiều nhà toán học được Giải thưởng Fields sau ông: Deligne, Drinfeld, Kontsevich, Voevodsky, Lafforgue và một số người khác.

Grothendieck đã góp phần làm cho IHES thực sự trở thành một trong vài ba trung tâm lớn nhất của toán học thế giới. Chỉ một chi tiết sau đây cũng cho ta thấy rõ điều đó: Từ ngày thành lập đến nay, IHES mới có 10 người là “giáo sư chính thức” (professeur permanent) thì đã có 7 người đoạt giải Fields, đó là: Alexandre Grothendieck, René Thom, Jean Bourgain, Alain Connes, Pierre Deligne, Maxim Kontsevich, Laurent Lafforgue.

Grothendieck đã làm một cuộc cách mạng thực sự trong toán học. Ông để lại dấu ấn của mình trong mọi lĩnh vực của toán học hiện đại. Người ta có thể nhận ra ảnh hưởng của Grothendieck ngay cả khi không thấy trích dẫn định lý cụ thể nào của ông. Điều này cũng giống như ảnh hưởng của Picasso đến thẩm mỹ của thời đại chúng ta: Ta nhận ra Picasso không chỉ qua các bức hoạ của ông, mà thấy Picasso ngay trong hình dáng của những vật dụng hàng ngày.

Việc Grothendieck đột ngột rời bỏ IHES, và nói chung, rời bỏ toán học năm 1970, vào thời kì thiên tài của ông đang ở đỉnh cao, đã làm xôn xao giới toán học. Cho đến tận bây giờ, người ta vẫn không thật hiểu rõ tại sao. Nhiều người cho rằng ông không đồng ý với việc IHES nhận một số tiền tài trợ của các cơ quan quân sự (thực ra vào thời điểm đó, số tiền này chỉ khoảng 3,5% ngân sách của Viện). Ông là người luôn có những quan điểm riêng của mình, và có thể là như nhiều người quan

niệm, ông khá "ngây thơ" về chính trị. Giáo sư Louis Michel kể lại: Có một lần, ông chỉ cho Grothendieck xem bản thông báo về một hội nghị quốc tế mà Grothendieck được mời làm báo cáo viên chính. Trong phần liệt kê các cơ quan tài trợ có NATO, và Michel hỏi Grothendieck xem có biết NATO là gì không, thì Grothendieck trả lời "không"! Sau khi được giải thích NATO là gì, Grothendieck đã viết thư cho ban tổ chức hội nghị để phản đối. Và cuối cùng, vì không muốn mất Grothendieck, ban tổ chức đành chịu mất NATO!



Vậy mà con người có vẻ như ngây thơ về chính trị, không biết NATO là gì, đã đến thăm và giảng bài tại Việt Nam trong thời gian chiến tranh. Một số người bạn gần gũi với ông, như giáo sư Pierre Cartier, cho rằng Việt Nam chính là một trong những nguyên nhân làm thay đổi quan niệm của Grothendieck. Nhìn thấy những gì chiến tranh mang lại cho loài người, Grothendieck nghi ngờ về ý nghĩa của khoa học. Ông cho rằng khoa học đã bị lợi dụng để làm hại loài người. Chuyến thăm Việt Nam của

ông đã gây một tiếng vang lớn trong cộng đồng toán học quốc tế. Khi đến Việt nam (năm 1967), ông đọc bài giảng về Đại số đồng điều tại Hà Nội. Thường thì Giáo sư Tạ Quang Bửu (lúc đó là Bộ trưởng Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp) hoặc Giáo sư Đoàn Quỳnh phiên dịch cho ông. Người ta thật sự kinh ngạc vì sự bình tĩnh của ông: Các bài giảng của ông thường bị ngắt quãng vì những lần máy bay Mỹ bắn phá thành phố. Vậy mà ông, người đến từ một đất nước đã từ lâu không có chiến tranh, không hề tỏ ra mấy may lo sợ. Nhưng rồi thì các bài giảng của ông cũng phải chuyển lên khu sơ tán, vì không thể nào giảng bài khi mà buổi học bị ngắt quãng hàng chục lần vì máy bay.

Theo lời Grothendieck, chuyến đi Việt Nam đã làm ông thật sự ngạc nhiên: Ở một đất nước ngày đêm phải đối đầu với cuộc chiến tranh ác liệt bậc nhất trong lịch sử,

người ta vẫn dạy toán, học toán, và biết đến những thành tựu hiện đại nhất của toán học! Từ sự ngạc nhiên đó, ông đã công bố "định lý" của mình trong bài viết về chuyến thăm Việt Nam (được lưu hành rất rộng rãi thời đó ở các trường đại học phương Tây): *"Tồn tại một nền toán học Việt Nam"*.

"Định lý" trên đây của Grothendieck đã làm thế giới toán học biết đến nền toán học Việt nam trong chiến tranh. Chuyến đi của Grothendieck đã mở đầu cho một loạt chuyến đi thăm và giảng bài của nhiều nhà toán học lớn đến Việt Nam, trong đó nhiều nhất vẫn là các nhà toán học Pháp: L. Schwartz, A. Martineau, P. Cartier, B. Malgrange, Y. Amice,... Có thể nói chuyến đi của Grothendieck là một cột mốc quan trọng trong lịch sử hợp tác khoa học giữa các nhà toán học Việt nam và các nhà toán học Pháp.

Từ sau năm 1993, Grothendieck không còn địa chỉ bưu điện nữa, không ai có thể liên lạc với ông, ngoại trừ một số người bạn gần gũi. Ông sống trong một căn nhà nhỏ bên sườn dãy Pyrénées. Có lẽ bộ óc lớn bậc nhất của toán học đó đang muốn giành thời gian suy ngẫm về cuộc đời. Cả cuộc đời ông là một chặng đường gian nan đi tìm chân lý. Nếu như các chân lý toán học tìm đến với ông nhiều một cách đáng ngạc nhiên, thì trong cuộc đời, như Cartier nói, Grothendieck không tìm được cho mình một chỗ mà ông thấy thoải mái. Trong rất nhiều năm, ông không phải là công dân của một quốc gia nào, và đi khắp nơi trên thế giới với tấm hộ chiếu do Liên hợp quốc cấp, mà trong mục "quốc tịch" được ghi là "apatrite" (tức là "không quốc tịch"). Xuất thân trong một gia đình Do Thái giáo truyền thống, Grothendieck được những người kháng chiến theo đạo Tin Lành che chở, và cuối cùng, ông quan tâm nhiều đến Phật Giáo. Ông luôn sống theo những nguyên tắc của riêng mình, và nhiều khi cảm thấy thất vọng trước cuộc sống.

Cuộc đời Grothendieck là một cuộc đời đầy vinh quang, đầy bi kịch, mang đậm chất "tiểu thuyết", mà trong một bài viết nhỏ không thể nào nói hết được.

Vài lời viết thêm

Tôi xin phép được ghi lại nguyên văn ở đây một số góp ý của Giáo sư Hoàng Xuân Sính khi đọc bản thảo, vì nó giúp ta hiểu thêm (hay khó hiểu hơn?) về con người huyền thoại Grothendieck:

"Đúng là rất khó biết được đời tư của Grothendieck. Tôi đã được Grothendieck kể nhiều lần về quãng đời thơ ấu ở Đức và Pháp; nhưng vì không ghi lại nên sợ không chính xác, mặt khác tôi không dám kể với ai khi không được phép của Grothendieck. Dù sao, đoạn sau đây là do chính Grothendieck viết trong

"Reflexions et témoignages sur un passé de mathématicien" mà tôi xin trích dịch:
"Tôi học năm đầu lycée trước hết ở Đức, sau đó ở Pháp. Năm 1940 là năm đầu tiên tôi học lycée bên Pháp. Lúc đó là chiến tranh. Mẹ tôi và tôi bị giam trong trại tập trung ở Rieucros, gần Mende. Tôi là đứa trẻ lớn nhất ở trại và là đứa duy nhất đi học lycée. Tôi ở cách trại từ bốn đến năm cây số. Trời tuyết hay trời gió, tôi đi tới trường với những đôi giày tạm, bị thấm nước. Mấy năm cuối của chiến tranh, trong lúc mẹ tôi vẫn bị giam ở trại tập trung, tôi sống ở một nhà giành cho trẻ con tị nạn của "Secours Suisse" ở Chambon sur Lignon. Phần lớn bọn trẻ chúng tôi là người Do Thái, và khi cảnh sát địa phương báo cho chúng tôi là bọn Gestapo sắp vây lùng, chúng tôi chạy vào rừng ẩn náu độ một hai đêm, đi từng nhóm hai hay ba người, không có ý thức lắm về mối hiểm nguy chết người. Vùng Cévennes đầy những người Do Thái ẩn náu, và nhiều người sống sót nhờ tình đoàn kết của dân địa phương. Ở đây, tôi đi học ở "Collège Cévenol" cho đến năm 1945. Giữa 1945 và 1948 tôi là sinh viên ở đại học Montpellier. Mẹ tôi và tôi sống ở xóm nhỏ Mairargner heo hút, cách Montpellier độ hơn chục cây số. Chúng tôi sống tận tiện bằng cái học bổng sinh viên nghèo nàn của tôi. Để sống được qua ngày tháng, mỗi hè tôi đi hái nho; và lại có cả cái vườn nữa cho chúng tôi rau quả. Đó là một cuộc sống tươi đẹp, trừ khi phải đối mặt với những tiêu pha như thay gọng kính hay đôi giày mòn vẹt cả đế. Mẹ tôi đau yếu vì nhiều năm bị giam cầm trong trại tập trung, nhưng may mắn làm sao chúng tôi có sự trợ giúp y tế miễn phí, nếu không thì không biết làm sao trả tiền thầy thuốc..."

STEPHEN SMALE

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1966



Người ta thường cho rằng thiên tài toán học phải thể hiện ngay từ khi còn nhỏ. Điều đó đúng với rất nhiều trường hợp, nhưng không phải là với Stephen Smale! Khi ông còn học trung học, nếu người ta nói Smale có khả năng gì đó, thì chỉ là việc đánh cờ. Khi vào đại học Michigan, ông quan tâm nhiều nhất đến du lịch và hoạt động xã hội. Ngay khi đã vào nghiên cứu sinh, sau học kỳ thứ hai, ông bỏ hai môn thi, và môn còn lại được điểm C. Ông T. H. Hildebrandt, người phụ trách lúc đó, đã nhắc nhở Smale là muốn được tiếp tục làm nghiên cứu sinh thì phải cố gắng hơn! Hildebrandt nhận xét "*Smale là nghiên cứu sinh chưa đạt yêu cầu*". Mặc dù vậy, thầy hướng dẫn của ông, Raoul Bott – khi đó còn chưa nổi tiếng – giao cho Smale, một trong những cậu học sinh đầu tiên của mình, nghiên cứu vấn đề tuyệt vời và khó khăn: *Phân lớp đồng luân các đường cong đóng trên một đa tạp tùy ý*. Năm 1957, Smale bảo vệ luận án tiến sĩ của mình "*Các đường cong chính quy trên đa tạp Riemann*", trong đó ông mở rộng các kết quả của Whitney từ năm 1937 về đường cong trong mặt phẳng. René Thom nhận xét rằng, ngay từ những kết quả đầu tiên của luận án, người ta đã nhận thấy Smale là người có trực giác siêu việt.

Ngay sau luận án, Smale làm việc gần như đồng thời trong hai lĩnh vực: tôpô và hệ động lực. Với hệ động lực, ông sáng tạo nên "móng ngựa" nổi tiếng có tính ổn định trong hỗn độn. Vài tháng sau, ông lại tấn công vào giả thuyết Poincaré cổ điển, và chứng minh rằng giả thuyết đó đúng với số chiều lớn hơn 4. Để đi đến kết quả này, Smale đã dùng kỹ thuật "giải phẫu" để cắt khỏi mặt cầu đồng luân các điểm tới hạn có chỉ số khác 0 và khác n (chiều của đa tạp). Như vậy còn lại một đa tạp mà trên đó tồn tại hàm chỉ thừa nhận hai điểm tới hạn (cực đại và cực tiểu). Đây là một tình huống đơn giản trong lý thuyết Morse, và vấn đề được giải quyết. Trong lời giới thiệu công trình của Smale tại Đại hội toán học 1966, Thom nói rằng công trình của Smale đã mở ra một trang mới trong tôpô đại số, và ta có thể nói rằng "*tôpô của các không gian, các đa tạp khả vi từ nay có thể xem như đã hoàn thiện*". Ngay sau đó, Smale chuyển sang một lý thuyết mới: *Lý thuyết định tính các phương trình vi phân trên đa tạp*, một lý thuyết khởi đầu từ những công trình của Poincaré và Birkhoff. Thom nói một cách ví von rằng, "*Smale là người đi tiên phong, chấp nhận phiêu lưu với một sự dũng cảm thầm lặng; trong một lĩnh vực chưa được khai phá, trong khu rừng rậm hình học ẩn chứa nhiều điều phong phú, mà ông là người vạch ra những lối đi nhỏ đầu tiên... Công trình của ông có tầm quan trọng cơ bản trong tương lai, và có thể sánh với những bậc tiền bối vĩ đại là Poincaré và Birkhoff*". Có lẽ khó tìm được lời đánh giá nào cao hơn!

Smale là một trong những nhà toán học lớn đã thể hiện tài năng trên nhiều lĩnh vực. Với ông, không hề có ranh giới giữa các ngành toán học, ông cũng không hề phân biệt “toán lý thuyết” với “toán ứng dụng”. Với ông, chỉ có một toán học duy nhất.

Kể từ sau khi nhận Giải thưởng Fields, mối quan tâm chủ yếu của ông chuyển sang việc mô hình hoá các hiện tượng vật lý bằng các hệ động lực. Ông áp dụng lý thuyết hệ động lực vào bài toán n vật thể và lý thuyết điện từ. Sang đến những năm của thập kỷ 70, ông lại đưa tôpô và hệ động lực vào nghiên cứu các vấn đề của cân bằng kinh tế. Khi đã thiết lập bản chất của sự cân bằng, Smale lại quan tâm đến các thuật toán để tính toán. Ý tưởng của ông trong vấn đề này cũng là một sự đột phá: Trong khi các cách tiếp cận truyền thống đến lý thuyết hội tụ của thuật toán đều mang bản chất địa phương, Smale đã xem xét vấn đề toàn cục.

Smale quan tâm nhiều đến tin học lý thuyết. Ông phát triển một mô hình tính toán trong đó chứa đựng cả cách tiếp cận máy Turin và các phương pháp số của giải tích số. Trong những năm gần đây, Smale lại sáng tạo ra một lý thuyết mới: *Lý thuyết “học tập”* (Learning Theory). Trong dịp đến thăm Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam năm 2004, ông đã đọc một chuyên đề trong suốt một tuần về lý thuyết này. Còn quá sớm để nói về một lý thuyết mới, nhưng có lẽ những gì mà Smale sáng tạo ra sẽ đều là những vấn đề cơ bản của toán học, và *Lý thuyết “học tập”* chắc không phải là một ngoại lệ!

Stephen Smale sinh ngày 15 tháng 7 năm 1930 tại Flint, Michigan. Ông tốt nghiệp Đại học Michigan năm 1952, nhận bằng Thạc sĩ năm 1953 và bằng Tiến sĩ năm 1957 cũng tại Michigan. Sau hai năm làm giảng viên tại đại học Chicago, ông được mời làm việc tại nhiều trung tâm lớn như Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton (1958–1960), Collège de France (1962). Ông nhận chức Giáo sư của Đại học Columbia từ 1961 đến 1964, rồi chuyển về Đại học Berkeley.

Ngoài Giải thưởng Fields, Smale còn nhận được nhiều giải thưởng và những sự tôn vinh khác: Alfred Sloan (1960–1962); Viện sĩ nước ngoài, Viện hàn lâm khoa học Brazilia (1964); Giải thưởng Veblen về hình học của Hội toán học Mỹ (1965); Giải thưởng của Đại học Michigan (1967); Viện sĩ Viện hàn lâm Nghệ thuật và Khoa học Mỹ (1967); Viện sĩ Viện hàn lâm quốc gia Mỹ (1970); Tiến sĩ danh dự Đại học Warwick (Anh, 1974), Đại học Queens, Kingston (Canada, 1987); Giải thưởng Von Neumann của Hội toán học ứng dụng và công nghiệp; cùng nhiều giải thưởng khác.

Năm 1996, Smale nhận được Huy chương quốc gia về khoa học vì “những công trình tiên phong trong những vấn đề nghiên cứu cơ bản, đưa lại những tiến bộ nổi bật trong toán học lý thuyết và ứng dụng”.

Có một điều có thể làm nhiều người ngạc nhiên là Smale nhận được Huy chương nói trên từ Tổng thống Clinton, 30 năm sau khi ông được Giải thưởng Fields, mà không phải là từ một tổng thống nào đó trước đây! Ta có thể hiểu nếu nhớ lại sự kiện khá nổi tiếng là, sau khi Smale nhận được Giải thưởng Fields, ông không những không được ưu tiên hơn, mà còn bị cắt quỹ nghiên cứu khoa học! Điều kì lạ này đã xảy ra vì nguyên nhân chính trị: Smale là một trong những người đấu tranh đòi chấm dứt sự can thiệp của Mỹ trong chiến tranh Việt Nam. Ông đã đứng ra tổ chức một diễn đàn phản đối hành động của Mỹ ở Việt Nam bên lề Đại hội toán học quốc tế 1966 ở Matxcova, đại hội mà ông được trao Giải thưởng Fields. Nên nhớ rằng 1966 là năm mà Mỹ đẩy mạnh chiến tranh ở Việt Nam, chuyển từ chiến lược “chiến tranh đặc biệt” sang “chiến tranh cục bộ”, với sự tham chiến ồ ạt của quân đội Mỹ vào chiến trường miền Nam Việt Nam. Trong bối cảnh đó, nền “dân chủ” Mỹ cũng khó chịu đựng hành động của một trí thức lớn như Stephen Smale! Trở về Berkeley sau Đại hội toán học thế giới, Smale thành lập “Ủy ban ngày Việt Nam” trong phong trào “Nói tự do” (Free Speech Movement) ở Berkeley.



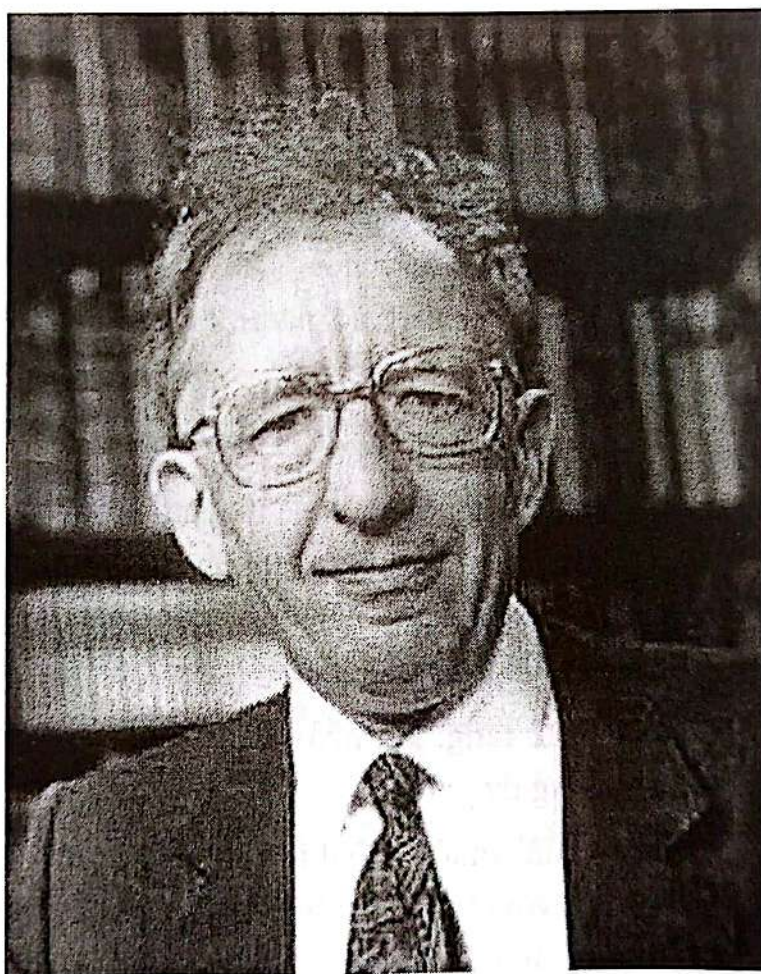
Tác giả và Smale tại Viện Toán học năm 2005

Ngoài toán học, Smale thích sưu tầm đá quý. Trong bộ sưu tập của ông có nhiều viên đá rất hiếm. Ông muốn chứng tỏ rằng, với một nguồn thu nhập không lớn, người ta vẫn có thể có được những viên đá mà ngay bảo tàng cũng phải ghen tỵ!

Mở đầu bài nói chuyện của ông với sinh viên và các nhà toán học Việt Nam năm 2004 (tổ chức tại Hội trường Đại học Bách khoa Hà Nội), ông ngẹn lời khi nhắc đến cuộc chiến tranh Việt Nam. Chúng tôi vô cùng cảm động và biết ơn ông, con người có những đóng góp to lớn cho toán học, và cho phong trào chống cuộc chiến tranh xâm lược của Mỹ ở Việt Nam. Với uy tín của ông, những hoạt động của ông có ảnh hưởng to lớn trong tầng lớp trí thức phương Tây thời đó.

ALAN BAKER

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1970



Alan Baker được tặng Giải thưởng Fields năm 1970 tại Đại hội toán học quốc tế ở Nice. Giải thưởng đó được trao cho ông nhờ các công trình về phương trình Diophant (phương trình chỉ xét các nghiệm nguyên).

Các phương trình Diophant đã có lịch sử hơn 2000 năm. Ngay ở Việt Nam, bài toán cổ “một trăm con trâu, một trăm bó cỏ, trâu đứng ăn năm, trâu nằm ăn ba, trâu già ba con một bó, hỏi mỗi loại trâu có mấy con”, (tất nhiên với điều kiện xem trâu già không nằm mà cũng không đứng!) là bài toán về phương trình Diophant, đã từng được giải trong sách “Đại thành toán pháp” của Lương Thế Vinh vào thế kỷ 17.

Mặc dù có lịch sử phát triển lâu đời như vậy, cho đến những năm đầu của thế kỷ 20, người ta chỉ biết đến những bài toán lẻ tẻ, được giải nhờ những phương pháp tài tình và đặc biệt. Vì thế, các phương trình Diophant luôn luôn là các “bài toán đố”, và ít ai nghĩ là có thể tìm cách giải tương đối tổng quát (cho từng loại phương trình). Có lẽ Thue (1863–1922), nhà toán học Na Uy, là người đầu tiên có một kết quả đột phá khi ông chứng minh (vào năm 1909) rằng mọi phương trình Diophant dạng:

$$f(x, y) = m,$$

trong đó m là số nguyên khác 0 và f là đa thức thuần nhất hệ số nguyên, bất khả quy, bậc ít nhất là 3, có không quá hữu hạn nghiệm. (Xin nhắc lại rằng, một đa thức hệ số nguyên được gọi là bất khả quy nếu nó không phân tích được thành tích hai đa thức bậc ít nhất bằng 1, với hệ số nguyên).

Edmund Landau viết năm 1922 rằng, kết quả của Thue là phát minh quan trọng nhất trong số học sơ cấp mà ông được biết.

Carl Siegel và Klaus Roth (Giải thưởng Fields năm 1954) đã mở rộng các lớp phương trình Diophant mà đối với chúng, kết luận nêu trên vẫn còn đúng, thậm chí có thể đưa ra cận trên của số nghiệm phương trình. Baker đi xa hơn, ông đưa ra các phương pháp, mà ít nhất là trên nguyên tắc, cho phép tìm thấy lời giải đầy đủ của vấn đề. Ông chứng minh rằng đối với các phương trình dạng $f(x, y) = m$ đã mô tả trên đây, tồn tại số B chỉ phụ thuộc m và các hệ số nguyên của f sao cho với mọi nghiệm (x_0, y_0) của $f(x, y) = m$, ta có:

$$\max(|x_0|, |y_0|) \leq B.$$

Điều này có nghĩa là để tìm nghiệm của phương trình đã cho, chỉ cần xét một số hữu hạn khả năng có thể (chỉ cần xét các số nguyên có giá trị tuyệt đối giới hạn

bởi số B). Như vậy, trên nguyên tắc, có thể xác định một danh sách đầy đủ các nghiệm bằng cách thay lần lượt vào phương trình tất cả các cặp số nguyên mà mỗi số có trị tuyệt đối bé hơn hay bằng B , cặp số nào cho giá trị của f đúng bằng m sẽ là nghiệm của phương trình. Dĩ nhiên, trên thực tế thì điều này nói chung không thể làm được, do số B quá lớn.

Baker cũng có đóng góp to lớn vào Bài toán Hilbert thứ bảy. Đó là bài toán hỏi rằng a^q có phải là số siêu việt hay không khi a và q là các số đại số (số đại số là các số mà là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên, số siêu việt là các số thực không phải là số đại số. Nói chung việc chỉ ra một số có phải là số siêu việt hay không là điều hết sức khó khăn). Chính Hilbert nghĩ rằng, trong số 23 bài toán mà ông đề ra cho toán học thế kỷ 20, bài toán thứ 7 có thể là bài toán thuộc loại khó nhất, khó hơn cả lời giải Giả thuyết Riemann (xem bài viết về Selberg trong tập sách này). Tuy nhiên, bài toán Hilbert thứ bảy đã được giải quyết một cách độc lập năm 1934, bởi hai nhà toán học Gelfond (người Nga) và Schneider (người Đức). Cụ thể là, theo định lý Gelfond–Schneider, a^q là số siêu việt nếu a là số đại số (khác 0, 1), còn q là số đại số vô tỷ. Gelfond phát biểu giả thuyết tổng quát sau đây, mà định lý nêu trên chỉ là một trường hợp riêng:

Nếu a_m và b_m với $1 \leq m \leq n$ là các số đại số, sao cho $\{\ln a_m, 1 \leq m \leq n\}$ độc lập tuyến tính trên trường $\mathbb{Q}$, thì $b_1 \ln a_1 + b_2 \ln a_2 + \dots + b_n \ln a_n \neq 0$.

Bằng cách chứng minh Giả thuyết Gelfond (năm 1966) Baker đã thành công trong việc mở rộng đáng kể định lý Gelfond–Schneider. Nhờ công trình của Baker, người ta biết đến một phạm trù rộng lớn các số siêu việt mà trước đó chưa được xét đến. Mặt khác, công trình của ông cũng chỉ ra cách mà các công trình lý thuyết có thể dẫn đến việc giải một lớp rộng lớn các phương trình Diophant. Có thể nói rằng, với các kết quả của Thue, Siegel, Roth, Gelfond, Schneider, Baker,... số học dần dần thoát khỏi thời kỳ “thủ công”, khi mà mỗi phương trình đòi hỏi một “meo” giải. Đó là những kết quả quan trọng đầu tiên cho thấy các cấu trúc tổng quát ẩn chứa trong số học, và góp phần hình thành quan niệm về sự thống nhất của toán học, điều được chứng minh về sau trong rất nhiều công trình của các nhà toán học được Giải thưởng Fields.

Về các kết quả của Baker, Turan viết: *Công trình của ông là một ví dụ về hai điều hết sức hấp dẫn. Thứ nhất, nó thể hiện xu hướng mạnh mẽ bắt đầu từ một lý thuyết để tiến đến giải những bài toán cụ thể. Thứ hai, nó chỉ ra rằng, việc giải trực tiếp*

một bài toán sâu sắc tự nó có thể phát triển một cách rất tự nhiên thành một lý thuyết phong phú và có mối liên hệ nhanh chóng và hữu ích với những bài toán quan trọng của toán học.

Alan Baker sinh ngày 19 tháng 8 năm 1939 tại Lodon, Anh. Ông tốt nghiệp trường trung học Stratford Grammar, sau đó vào học Đại học London. Sau khi nhận bằng cử nhân, ông chuyển đến Trinity College Cambridge để học cao học. Tiếp tục nghiên cứu tại Cambridge, Baker bảo vệ luận án tiến sĩ và được nhận vào làm việc tại Trinity College năm 1964.

Từ năm 1964 đến 1968 Baker làm nghiên cứu viên tại Cambridge, sau đó trở thành Giám đốc nghiên cứu về Toán (tương tự như chức vụ nghiên cứu viên cao cấp ở nước ta), và giữ chức vụ đó cho đến 1974, khi ông được bổ nhiệm làm Giáo sư toán lý thuyết. Trong thời gian đó, ông nhiều lần sang Mỹ làm việc: là thành viên của Viện nghiên cứu cao cấp Princeton (Institute for Advanced Studies, Princeton) năm 1970, giáo sư mời tại Stanford năm 1974.

Baker viết nhiều cuốn sách nổi tiếng, trong số đó phải kể đến các cuốn *Lý thuyết số siêu việt* (1975), *Lý thuyết siêu việt: thành tựu và ứng dụng* (1977) và *Nhập môn ngắn vào lý thuyết số* (1984).

Ngoài Giải thưởng Fields, Baker còn nhận được nhiều giải thưởng cao quý khác, như Giải thưởng Adams Prize của Đại học Cambridge năm 1972. Ông cũng được bầu vào Viện hàn lâm Hoàng gia năm 1973, Viện sỹ danh dự của Viện hàn lâm khoa học Ấn Độ năm 1980.

HEISUKE HIRONAKA

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1970



Có lẽ không một người làm toán nào lại không biết, hoặc ít nhất là nghe nói đến “Định lý giải kỳ dị Hironaka”. M. Grômôv, một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất hiện nay, đã nhận xét rằng, *đó là định lý kỳ diệu nhất, là duy nhất trong lịch sử toán học. Đó là một trong những định lý khó nhất của thế giới, mà kể từ ngày nó ra đời, chưa hề được làm mạnh hơn hoặc đơn giản hơn* (trích phát biểu của Grômôv ngày 19 tháng 11 năm 2002 tại Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES), nhân buổi lễ thành lập Quỹ Hironaka giành cho các nhà toán học Nhật Bản đến làm việc tại IHES). Không chỉ Grômôv có quan điểm như vậy, mà đó cũng là cảm nhận chung của giới toán học. Có điều đặc biệt là, định lý giải kỳ dị chứng minh hết sức khó khăn, nhưng lại là một trong những định lý dễ áp dụng nhất. Hầu như những ai nghiên cứu về hình học đại số, giải tích phức nhiều biến,...đều có ít nhất một lần phải dùng đến định lý giải kỳ dị của Hironaka. Có thể nói, định lý đó đã trở thành định lý kinh điển của toán học. Cho đến nay, vẫn có rất nhiều bài viết chỉ nhằm mục tiêu làm cho người ta hiểu được chứng minh của định lý giải kỳ dị (Chẳng hạn bài báo dài 81 trang của Herwig Houser “*Định lý giải kỳ dị của Hironaka (hay là: Một chứng minh mà chúng ta luôn luôn muốn hiểu*” đăng trong tạp chí Tin tức hội toán học Mỹ, 2003).



Hironaka tại Viện Toán học

Tờ báo "Voices" số 3 năm 2002 đăng bài phỏng vấn Hironaka dưới tựa đề "Kỳ dị làm cho kinh tế và toán học trở thành hấp dẫn", trong đó Hironaka phát biểu nhiều quan điểm độc đáo về toán học và vai trò của toán học trong xã hội. Khi được hỏi về lý thuyết kỳ dị, ông mô tả thật là đơn giản. "Người ta thường xác nhận con người qua chữ ký. Lý do để chữ ký được xem như đặc trưng cho con người vì nó có rất nhiều kỳ dị. Hình dạng các chữ và cách sắp xếp chúng làm nên chữ ký. Các điểm kỳ dị trên đó làm cho chữ ký trở thành đặc trưng cho mỗi người. Cũng có thể lấy khuôn mặt người làm ví dụ. Nếu mặt người mà chỉ trơn tròn như quả bóng thì làm sao phân biệt nổi người này với người khác? Chính các kỳ dị của mắt, mũi, miệng đã làm nên sự khác biệt. Các kỳ dị tạo ra đặc trưng của mỗi cá thể. Trong kinh tế cũng vậy. Chúng ta sáng tạo ra các mô hình dựa trên sự quan sát các giai đoạn phát triển: suy tàn, khôi phục và lớn mạnh. Không thể xây dựng một mô hình của một cái gì đó nếu nó hoàn toàn không có điểm đặc biệt. Các sự kiện như những sự hỗn loạn ngẫu nhiên làm cho việc xây dựng mô hình trở nên dễ dàng". Nói cách khác, theo cách giải thích của Hironaka, mỗi sự vật, hiện tượng của tự nhiên và xã hội đều đặc trưng bởi các "điểm kỳ dị" của nó: những điểm mà tại đó có sự đổi trạng thái. Chẳng hạn như khi ta thấy nước trên một dòng sông đang chảy hiền hoà bỗng cuộn xoáy, ta biết ở đó phải có một chướng ngại hay một hố sâu nào đó. Chỉ cần nghiên cứu hiện tượng, sự vật tại lân cận các "kỳ dị" của nó, ta sẽ dễ dàng hiểu rõ bản chất. Vì thế, lý thuyết kỳ dị chính là công cụ toán học hướng tới việc mô tả quá trình phát triển của sự vật, và cũng dễ hiểu rằng, không thể nào nghiên cứu bất cứ sự vật, hiện tượng nào mà không phải "làm việc" với các kỳ dị. Điều đó giải thích một phần tầm ảnh hưởng của định lý giải kỳ dị của Hironaka trong toán học.

Thế nào là "giải kỳ dị"? Như trên đã nói, khi xây dựng các mô hình, ta luôn thu được các đối tượng "có kỳ dị". Về mặt toán học, ta gặp phải các "đa tạp" mà tại đó có các điểm không trơn, tức là không có không gian tiếp xúc tại đó. Nếu là đường cong thì đó là các điểm không tồn tại tiếp tuyến. Tại lân cận các điểm đó, ta không thể áp dụng các công cụ của phép tính vi phân. Vì thế, người ta luôn cố gắng tìm kiếm một đối tượng khác, trên đó không có các điểm kỳ dị, nhưng vẫn bảo toàn hầu hết tính chất của đa tạp xuất phát, hoặc từ nó có thể suy ra các tính chất của đa tạp. Làm được như vậy, ta nói rằng đã "giải kỳ dị" được đa tạp ban đầu. Hironaka chứng minh rằng, các đa tạp đại số (trên trường đặc số bằng 0) có thể giải kỳ dị nhờ một *biến đổi song hữu tỷ*. Cụ thể hơn, hai đa tạp U và V được gọi là *tương đương song hữu tỷ* nếu chúng chứa các tập con mở U' và V' , sao cho chúng tương đương chính quy với nhau, tức là có ánh xạ chính quy đơn trị hai chiều biến U' thành V' và ngược lại. Vấn đề đặt ra là cho một đa tạp đại số V có kỳ dị, làm thế

nào để tìm được đa tạp đại số U không kì dị tương đương song hữu tỷ với V , nhờ một ánh xạ $f: U \rightarrow V$ là ánh xạ chính quy, nhưng không là song chính quy.

Hironaka đã cho câu trả lời tổng quát cho bài toán nêu trên đối với đa tạp với số chiều tùy ý vào năm 1964. Kết quả đó đã mang lại cho ông Giải thưởng Fields và vinh dự của một người chứng minh được một trong những định lý khó nhất của toán học. Cũng cần nhắc lại rằng, O. Zariski, thầy hướng dẫn luận án tiến sĩ của Hironaka, đã chứng minh định lý giải kì dị với chiều không vượt quá 3.

Hironaka sinh ngày 9 tháng 4 năm 1931 ở Yamaguchi, Nhật Bản. Ông theo học ở trường đại học Kyoto nổi tiếng, và tốt nghiệp năm 1954. Ông làm nghiên cứu sinh với Zariski tại đại học Harvard, Mỹ, và bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1960. Sau một thời gian làm việc tại Harvard, ông nhận chức giáo sư ở đại học Columbia từ năm 1964 đến năm 1968. Sau đó, ông vừa là giáo sư của đại học Kyoto, vừa là giáo sư của đại học Harvard.

Hironaka có nhiều đóng góp cho việc xây dựng nền toán học và khoa học Nhật Bản. Ông đã nhiều năm làm Giám đốc đại học Yamaguchi, lập nhiều quỹ để khuyến khích các tài năng trẻ của Nhật Bản. Vì những công lao của mình, Hironaka được nhà nước Nhật Bản tặng Huân chương Văn hoá. Ảnh hưởng của ông ở Nhật Bản không chỉ thu hẹp trong giới toán học. Ông nổi tiếng ở đất nước của mình như một nhà hoạt động khoa học, văn hoá và xã hội.



Hironaka và tác giả, hai người ngoài cùng bên phải. Người mặc áo trắng là GS. Lê Dũng Tráng (một nhà toán học Pháp gốc Việt) tại một hội nghị toán học.

Hironaka rất có cảm tình với đất nước Việt Nam. Ông đã nhiều lần sang thăm và giảng bài tại Việt Nam. Ông đăng một bài báo trong tạp chí Acta Mathematica Vietnamica với nhan đề "*Làm nhẵn song phân hình không gian phức*". Bài báo ra năm 1977, với lời đề tặng cảm động: "*tặng những nhà toán học Việt Nam đã chết trong chiến tranh, sống trong chiến tranh và sinh ra trong chiến tranh*".

XERGÂÏ PETRÔVICH NÔVIKÔV

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1970



Rất nhiều thiên tài toán học được sinh ra trong những gia đình nghèo, hoặc hoàn toàn không có truyền thống về khoa học. D'Alembert là một đứa con rơi mà người ta nhặt được trước cửa nhà. Gauss, “ông vua” một thời của toán học, là con một người thợ. Thom, Giải thưởng Fields năm 1966, sinh trong một gia đình làm nghề bán hàng tạp hoá. Nói cho cùng, “thiên tài” phải là cái gì đó đột biến, và “truyền thống gia đình” thường là bảo đảm khá chắc chắn để một người có thể trở thành “người tài”, nhưng hầu như không liên quan gì đến việc họ có trở thành “thiên tài” hay không! Vậy nên, những điều kể ra sau đây về xuất thân của Xergây Pêtrôvich Nôvikôv hoàn toàn không phải là để giải thích cho sự hình thành thiên tài toán học của ông.

Xergây Pêtrôvich Nôvikôv sinh ngày 20 tháng 3 năm 1938 ở Gorki (nay là Nizny Novgorod), trong một gia đình có truyền thống toán học. Thân sinh của ông là Piôtr Xecgeevich Nôvikôv (1901–1975), viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Liên Xô, một chuyên gia xuất sắc trong lĩnh vực logic toán học, đại số, lý thuyết tập hợp và lý thuyết hàm. Mẹ ông, bà Lyutmila Vsevolodovna Keldysh (1904–1976) là giáo sư nổi tiếng về tô pô hình học và lý thuyết tập hợp. Hai ông bà đều xuất thân trong những gia đình trí thức truyền thống. Cậu của Nôvikôv là Mtislav Keldysh, người có đóng góp to lớn trong lý thuyết hàm biến phức, phương trình vi phân, các ứng dụng trong động lực học hàng không. Mtislav Keldysh là nhà khoa học hàng đầu của Liên Xô, từng giữ chức vụ Chủ tịch Viện hàn lâm khoa học Liên xô trong nhiều năm. Trong một gia đình giàu truyền thống như vậy, không có gì đáng ngạc nhiên khi không chỉ Xergây mà còn anh chị em khác của ông (trong gia đình có 5 anh chị em) theo nghề toán – lý. Người anh cả, Leonid là một chuyên gia hàng đầu thế giới về vật lý chất rắn, người anh thứ hai, Andrây, là nhà toán học chuyên về lý thuyết số đại số. Xergây là con thứ ba, hai người em gái của anh không theo con đường toán học.

Xergây theo ngành toán không chỉ do truyền thống gia đình. Trong nhiều năm, mặc dù rất ham thích toán học, anh vẫn chưa quyết định được một cách dứt khoát là sẽ theo chuyên ngành nào. Anh tham gia hai kỳ thi Olympic về toán khi 13, 14 tuổi, và đã chứng tỏ khả năng xuất sắc của mình.

Cuối cùng, khi tròn 17 tuổi, Xergây quyết định sẽ theo đuổi ngành toán. Tốt nghiệp phổ thông năm 1955, anh vào học tại Khoa Toán – Cơ trường Đại học Tổng hợp Lomonoxop, Matxcova. Ngay từ khi mới vào học, Xergây tham gia nghiên cứu nhiều vấn đề của toán học cao cấp. Bước vào năm thứ hai, anh đã chọn cho mình

một hướng nghiên cứu: tôpô đại số, và một người hướng dẫn: Postnikov. Vào thời kỳ này, Khoa Toán-Cơ của trường Đại học tổng hợp Matxcova là trung tâm hàng đầu thế giới về giải tích thực, với ảnh hưởng rõ rệt của Kolmogorov. Kolmogorov khi đó vừa giải quyết trọn vẹn *Bài toán Hilbert thứ 13*, và đang lãnh đạo một nhóm nghiên cứu trẻ rất tích cực. Thế nhưng, Xergây không theo giải tích thực, mà chọn tôpô, một hướng nghiên cứu chưa phải là quan trọng ở trường. Vì thế, khi Postnikov đi Trung Quốc trong năm học 1958–1959, Xergây cảm thấy không có người hướng dẫn. Nhưng phải chăng, với một thiên tài bẩm sinh, việc thỉnh thoảng rời xa thầy giáo lại là điều hay? Trong năm học đó, Xergây đọc các công trình của Adams, Thom, và tự tìm được đề tài nghiên cứu cho bản thân mình, đó là lý thuyết đối đồng điều các đại số Steenrod. Vào năm 1957, Milnor đưa ra các đại số Steenrod, và trong năm sau đó, đối đồng điều của các đại số Steenrod được Adams nghiên cứu. Công trình quan trọng đầu tiên của Nôvikôv *Đối đồng điều của đại số Steenrod* công bố năm 1959 trên tạp chí của Viện hàn lâm khoa học Liên Xô. Trong công trình này, Nôvikôv đã phát triển các phương pháp và kết quả của Adams, đặc biệt anh đưa ra một cách tiếp cận mới đến lý thuyết đối đồng điều các đại số Hopf. Công trình này đã làm cho anh sinh viên Nôvikôv nổi lên như một nhân vật hàng đầu của tôpô. Cách tiếp cận của Nôvikôv được Adams đánh giá là “*đơn giản, tự nhiên và tinh tế*”. Anh sinh viên của đại học Tổng hợp Mátxcova đã sớm hiểu được rằng, vẻ đẹp của toán học nằm trong sự giản dị, trong sáng chứ không phải là khoa trương hình thức. Anh viết: “*...tôi đã nghiên cứu các công trình của Whitney, Pontriagin, Thom và Milnor. Chúng được viết hết sức sáng sủa. Sự toàn vẹn của các chứng minh trong những công trình này đạt được mà không hề có gì khó hiểu, không có bất cứ sự hình thức hoá giả tạo nào*”.

Một số công trình quan trọng khác về tôpô các đa tạp liên quan đến lý thuyết các không gian Thom được Nôvikôv công bố năm 1960. Đó là các công trình chứa đựng các kết quả về lý thuyết đồng biên (cobordism) ứng với các phức hợp Thom ổn định. Trong các công trình đó ông tính toán các vành cobordism phức (Định lý Milnor–Nôvikôv) và phát triển các phương pháp đại số mới dựa trên ý tưởng xem lý thuyết cobordism phức như là một lý thuyết đối đồng điều. Những kết quả này nổi tiếng với tên gọi dây phổ Adams–Nôvikôv, đại số Hopf Landweber–Nôvikôv và toán tử kép của chúng (double Heisenberg, trong thuật ngữ của nhóm lượng tử). Về sau, cùng với các học trò của mình, Nôvikôv đưa ra khái niệm nhóm hình thức trong lý thuyết cobordism và phát triển các phương pháp để áp dụng. Các phương pháp này đã cho những kết quả quan trọng trong lý thuyết các tác động nhóm trên

đa tạp. Có thể nói rằng, những kết quả của Nôvikôv đã quyết định sự phát triển của lý thuyết cobordism.

Việc đọc các công trình của những nhà khoa học hàng đầu là đặc biệt quan trọng đối với các nhà toán học trẻ, nhưng việc tiếp xúc trực tiếp lại còn gây ấn tượng hơn. Nôvikôv có cái may mắn vì Milnor, Hirzebruch, Smale đều đến thăm Liên Xô trong mùa hè 1961 để tham gia nhiều hội nghị tại đó. Những cuộc gặp gỡ trực tiếp này đã giúp Nôvikôv tiếp cận nhiều bài toán và khuynh hướng hiện đại của tôpô đại số. Ông viết: *"Sau cuộc gặp của tôi với Smale tại Viện Toán học Steklov, nơi tôi đang làm nghiên cứu sinh, thầy hướng dẫn của tôi bắt đầu xem tôi như một nhà khoa học thực thụ"*.

Được khích lệ bởi các cuộc gặp gỡ mùa hè 1961, Nôvikôv đã giải quyết được một vấn đề quan trọng ngay trong mùa thu năm đó: Ông nhận được kết quả cơ bản trong bài toán phân loại các đa tạp đơn liên. Cụ thể là, trong trường hợp chiều ít nhất bằng 5, ông chứng minh rằng chỉ có hữu hạn cấu trúc vi phân trên một đa tạp đơn liên với các bất biến đồng luân cố định và tích phân cố định của các lớp Pontryagin.

Kết quả của ông về bài toán phân lớp các đa tạp đơn liên đã được công bố năm 1964 trong bài *Các đa tạp nhấn tương đương đồng luân*. Nôvikôv nhận được giải thưởng của Viện hàn lâm khoa học Liên Xô cho kết quả của mình, đồng thời nhận được học vị Tiến sĩ khoa học ngay trong năm đó.

Chứng minh nổi tiếng của Nôvikôv năm 1965 về bất biến tôpô của các lớp đặc trưng Pontriagin là kết quả ấn tượng đầu tiên trong vấn đề cơ bản của tôpô: Nghiên cứu các đồng phiôi liên tục của các đa tạp. Những bất biến vi phiôi quan trọng nhất sẽ như thế nào? Các cấu trúc xuyên của Nôvikôv đã cho phép giải quyết các vấn đề của tôpô liên tục dựa trên kỹ thuật phong phú được phát triển trong tôpô đại số và tôpô vi phân. Cách tiếp cận đó tiếp tục được phát triển trong các công trình về sau của các nhà toán học khác trong việc giải quyết nhiều vấn đề nổi tiếng của tôpô.

Nói chung, các lớp Pontriagin không phải là các bất biến đồng luân. Đối với các đa tạp đơn liên thì chỉ tồn tại một biểu diễn bất biến đồng luân trong các lớp Pontriagin, đó là công thức ký số của Hirzebruch. Nôvikôv nhận xét rằng nếu nhóm cơ bản của một đa tạp là không tầm thường thì tồn tại các biểu diễn bất biến đồng luân khác. Năm 1970 Nôvikôv phát biểu một giả thuyết tổng quát về việc tìm phân bất biến đồng luân của các lớp đặc trưng. Khó có thể nói hết ảnh hưởng của

Giả thuyết kỳ số chiều cao Novikov trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Cho đến ngày hôm nay, giả thuyết đã được chứng minh cho nhiều trường hợp riêng. Đó là một trong những bài toán nổi tiếng nhất của tôpô, và có một khối lượng khổng lồ công trình giành cho bài toán đó.

Lý thuyết tôpô định tính của các phân lá đối chiều một là công trình tôpô cơ bản khác của Nôvikôv. Công trình này có ứng dụng hiệu quả nhất trong nghiên cứu các đa tạp ba chiều. Đặc biệt, năm 1965 Nôvikôv chứng minh rằng mọi 2-phân lá không kỳ dị trên mặt cầu 3 chiều thừa nhận một phân thớ compact. Lý thuyết của Nôvikôv về các phiếm hàm đa trị có ảnh hưởng to lớn trong lý thuyết trường lượng tử (mô hình Wess–Zumino–Novikov–Witten) và là điểm khởi đầu của nhiều công trình tôpô khác (Vành Novikov, đồng điều và các bất đẳng thức trong lý thuyết Morse–Novikov). Lý thuyết đó đã trở thành nền tảng trong tôpô và hình học symplectic hiện đại.

Trong khoảng 10 năm gần đây, Nôvikôv cùng với một sinh viên trẻ của mình phát triển lý thuyết chuyển động “nửa cổ điển” của các hạt electron Bloch dọc theo mặt Fermi trong kim loại thường, trong một trường có từ trường mạnh. Các kết quả về tôpô đã đưa đến những hệ quả bất ngờ trong vật lý.

Không nghi ngờ gì nữa, Nôvikôv là một trong những nhân vật hàng đầu của những thập kỷ gần đây đã đưa toán học và vật lý xích lại gần nhau. Phát kiến của Nôvikôv về tương tự của nghiệm multisoliton trong bài toán tuần hoàn của phương trình Korteweg–de Vries là điểm xuất phát của lý thuyết soliton tuần hoàn. Nhiều tư tưởng của lý thuyết này tồn tại từ lâu trong các lĩnh vực khác nhau như giải tích, đại số, hệ động lực cổ điển. Tuy vậy, các tư tưởng này không được các nhà toán học chú ý đến vì họ làm việc hoàn toàn cô lập với nhau. Ngày nay, chúng xuất hiện lại như là những phần đan xen nhau trong một toán học mới, thống nhất với nhau trên nền tảng của những tư tưởng hoàn toàn mới. Các tư tưởng này làm nên một cuộc cách mạng trong hình học của lý thuyết phổ các toán tử tuyến tính tuần hoàn, chúng chỉ ra mối liên hệ sâu sắc giữa vật lý toán và hình học đại số. Người ta nói rằng, trong một thời gian dài chưa có điều gì tương tự như vậy xuất hiện trong lý thuyết trường lượng tử.

Để thấy được ảnh hưởng các công trình của Nôvikôv trong sự phát triển của vật lý toán hiện đại, chỉ cần kể tên một số hướng mà Nôvikôv và các học trò của ông phát triển. Trong số đó phải nhắc đến lý thuyết hình học đại số các toán tử Schrodinger hai chiều tuần hoàn dựa trên quan điểm các mặt Fermi phức; phân lớp

các toán tử vi phân giao hoán dựa trên phương pháp biến dạng; các phương trình Krichever–Novikov; xây dựng lý thuyết Laurent–Fourier trên diện Riemann; mở rộng các đại số Kac–Moody và Virasoro (các đại số và cơ sở Krichever–Novikov); lượng tử hoá toán tử các giây boson đóng; sự phát hiện các tính chất hình học đại số phổ dụng của các cấu trúc symplectic xuất hiện trong lý thuyết các hệ khả tích đầy đủ hữu hạn chiều không tầm thường (Novikov–Veselov); lý thuyết Hamilton các hệ kiểu thuỷ động học, là một lý thuyết cơ bản trong vấn đề phân lớp các mô hình trường tôpô (Novikov–Dubrovin).

Nôvikôv tốt nghiệp Khoa Toán–Cơ Trường đại học Tổng hợp Matxcova năm 1960 và làm việc tại đó từ năm 1964. Từ năm 1983, ông là Chủ nhiệm Bộ môn Hình học cao cấp và Tôpô. Bắt đầu từ năm 1992 ông thường xuyên đến thỉnh giảng tại trường Maryland at College Park, và từ năm 1996 trở thành giáo sư chính thức của trường.



Năm 1960 Nôvikôv vào làm nghiên cứu sinh của Viện Toán học Steklôv, Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô, dưới sự hướng dẫn của Postnikôv, và kể từ năm 1963 ông là thành viên chính thức của Viện. Ông nhận học vị Tiến sĩ năm 1963 và Tiến sĩ khoa học năm 1964 tại Viện Steklov, khi mới tròn 28 tuổi. Hai năm sau, ông được bầu làm Viện sĩ thông tấn Viện hàn lâm khoa học Liên Xô, và trở thành Viện sĩ chính thức kể từ năm 1981. Nôvikôv cũng đồng thời là Trưởng ban Toán của Viện Vật lý lý thuyết Landau của Viện hàn lâm. Ông là Chủ tịch Hội Toán học

Matxcova (1985–1996), Phó Chủ tịch Hiệp hội Vật lý toán quốc tế.

Ngoài Giải thưởng Fields, Nôvikôv nhận được nhiều giải thưởng và sự tôn vinh cao quý khác: Giải thưởng quốc tế Lobachevski của Viện hàn lâm khoa học Liên Xô, Hội viên danh dự Hội toán học London, Viện sĩ danh dự Viện hàn lâm Khoa học và Nghệ thuật Serbi, Tiến sĩ danh dự các Trường đại học Athens, Tel–Aviv,

Viện sĩ nước ngoài của Academia de Lincei, Italia (1991), Viện sĩ của Academia Europea (1992), Viện sĩ nước ngoài của Viện hàn lâm khoa học Hoa Kỳ (1994), Viện sĩ Viện hàn lâm Vatican (Pontifical Academy of Sciences, 1996).

Nhìn những học vị, chức vụ khoa học, giải thưởng mà Nôvikôv đã đạt được, có thể tưởng như mọi việc đến với ông một cách quá dễ dàng. Nhưng không phải hoàn toàn như vậy. Năm 1970, năm ông được trao Giải thưởng Fields, ông đã không được phép của Nhà nước Liên Xô để đến dự Đại hội toán học thế giới tại Nice. Điều này liên quan đến một sự kiện khá nổi tiếng thời bấy giờ: Nhiều nhà toán học hàng đầu của Liên Xô, trong đó có Nôvikôv, ký tên vào một bức thư phản đối việc bắt và đưa vào nhà thương điên một nhà toán học, con trai của nhà thơ Nga nổi tiếng Xécgây Êxênhin.

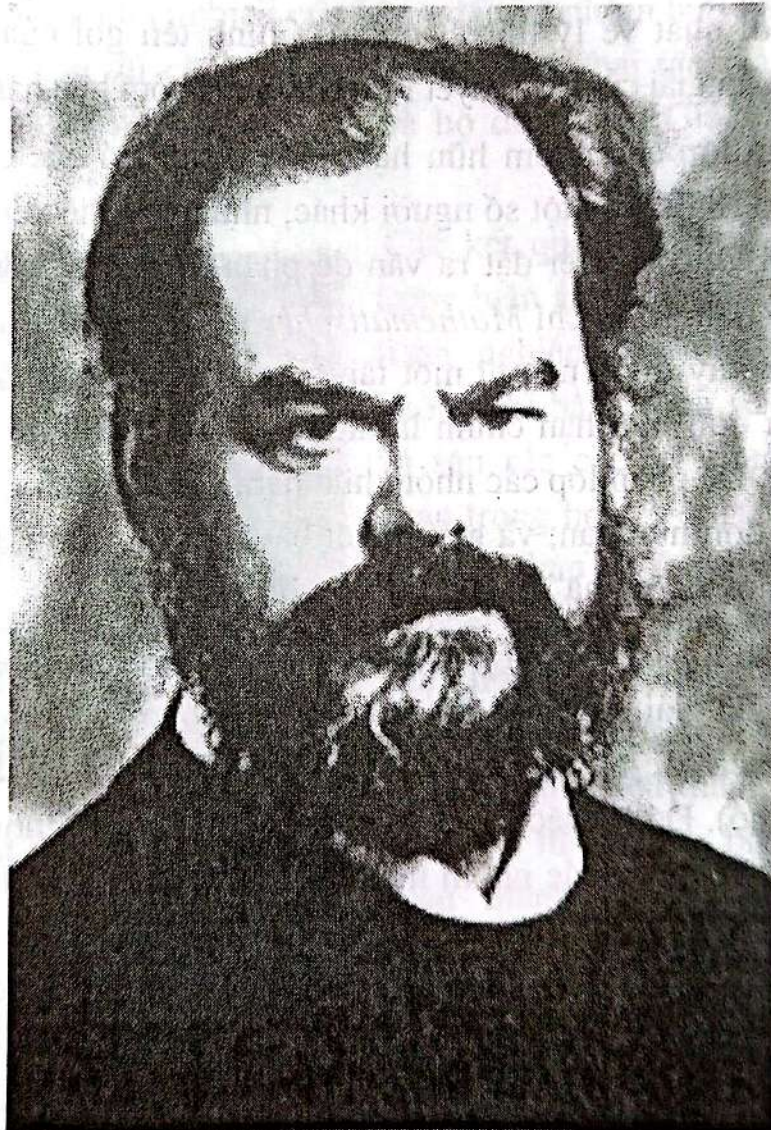
Nôvikôv đã đào tạo được hơn 30 Tiến sĩ, nhiều người trong số họ trở thành những nhà toán học nổi tiếng: V. M. Buchstaber, A. S. Mishchenko, I. M. Krichever, B. A. Dubrovin, G. G. Kasparov, F. A. Bogomolov, A. P. Veselov, S. M. Gusein-Zade, Lê Tự Quốc Thắng và nhiều người khác. Nhiều lý thuyết, kết quả quan trọng mang tên ông cùng với học trò của mình.



Tôi gặp ông, đúng hơn là nhìn thấy ông, lần đầu vào khoảng năm 1974–1975 tại Viện Toán học Steklov và Trường đại học Tổng hợp Matxcova. Cảm giác của tôi, cũng như của nhiều người, là khá ngại ngùng trước một con người quá nổi tiếng. Phong cách quá tự tin của ông đôi khi làm tăng thêm cảm giác đó ở những người gặp ông; ông sẵn sàng vừa hút thuốc lá, vừa trình bày xêmina tại Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES, Pháp), khi bên cạnh bảng có biển cấm hút thuốc! Nhưng người ta vẫn sẵn sàng chấp nhận, vì chắc mọi người bị lôi cuốn bởi bài giảng của ông, không còn để ý đến việc ông đang hút thuốc. Vậy nhưng khi ngồi cạnh ông, nghe ông “than phiền” rằng các con của mình chưa giống người châu Á bằng con của Maslov (vợ ông là người Triều Tiên, vợ Maslov, một nhà toán học hàng đầu của Liên Xô, là người Việt Nam), thì thấy ông là con người thật bình dị, hiền lành. Nhưng vẻ “hiền lành” đó của ông mất hẳn khi ông tranh cãi về toán học, về quan niệm trong khoa học. Phần lớn những ai đọc các bài viết của ông đều cảm nhận rõ điều đó.

JOHN GRIGGS THOMPSON

GIẢI THƯỜNG FIELDS 1970



Thompson được đánh giá là một trong những nhà lý thuyết nhóm xuất sắc nhất của mọi thời đại. Các công trình của ông về phân lớp nhóm hữu hạn là những đóng góp quyết định trong việc giải quyết bài toán quan trọng đó của toán học, bài toán có lịch sử hơn 100 năm.

John Griggs Thompson sinh ngày 13 tháng 10 năm 1932 ở Ottawa, bang Kansas, Mỹ. Ông tốt nghiệp trường Đại học Yale năm 1955 và chuyển đến làm nghiên cứu sinh tại Đại học Chicago dưới sự hướng dẫn của Mac Lane, một chuyên gia nổi tiếng về đại số. Ông nhận học vị Tiến sĩ tại Chicago năm 1959. Luận án của Thompson “Chúng minh một nhóm hữu hạn cấp nguyên tố với tự đẳng cấu không có điểm bất động là nhóm lũy linh” đã lập tức đưa ông vào hàng ngũ những chuyên gia giỏi nhất về lý thuyết nhóm. Chính tên gọi của luận án đã cho thấy rằng, luận án là lời giải của giả thuyết Frobenius về nhóm hữu hạn, tồn tại đã 60 năm.

Lý thuyết phân lớp các nhóm hữu hạn, mặc dù đã có các công trình của Galois (1832), Sylow (1872) và một số người khác, nhưng có thể xem là được bắt đầu vào năm 1892, khi Otto Holder đặt ra vấn đề phân lớp tất cả các nhóm đơn hữu hạn (trong bài báo đăng trên chí *Mathematische Annalen*). Mỗi nhóm hữu hạn có thể xem như được xây dựng nên từ một tập hợp hữu hạn các nhóm đơn hữu hạn. Vì thế, các nhóm đơn hữu hạn chính là những “viên gạch” để xây nên toà nhà các nhóm hữu hạn. Để phân lớp các nhóm hữu hạn, chỉ cần giải quyết hai vấn đề: phân lớp các nhóm đơn hữu hạn; và giải quyết bài toán mở rộng, tức là vấn đề làm thế nào để “xây được ngôi nhà” từ các viên gạch.

Có thể nói, phân lớp các nhóm đơn hữu hạn là một trong những bài toán cụ thể của toán học mà việc giải quyết nó đòi hỏi số trang báo viết ra dài nhất! Người ta cố gắng mô tả tất cả các nhóm đơn có hữu hạn phần tử (số phần tử của nhóm được gọi là cấp của nó). Đó là việc làm khó khăn, có thể nói là “nhọc nhằn”: Năm 1892, Frank Cole liệt kê tất cả các nhóm hữu hạn có cấp đến 500 (trừ các nhóm cấp 360 và 432); năm 1893, chính ông nâng lên cấp 660; vào năm 1900, Miller và Ling đưa được con số đó lên 2001. Tất cả các kết quả đó đạt được chỉ với hai kỹ thuật chính: định lý Sylow về các nhóm con cấp là một lũy thừa của số nguyên tố, và nguyên lý “chuồng bồ câu” nổi tiếng của Dirichlet. Tuy nhiên, ngay trong công trình của Holder đã ẩn chứa một cách tiếp cận khác: Vấn đề phức tạp không chỉ ở cấp (số phần tử) của nhóm, mà nằm trong cách khai triển cấp đó thành thừa số nguyên tố (chẳng hạn vấn đề với các nhóm cấp bằng 6, 10, 14, 15,... là phức tạp như nhau, vì các số đó đều là tích của hai số nguyên tố). Theo hướng này,

Frobenius chứng minh rằng (1893), nhóm đơn với cấp không là số chính phương phải là nhóm chu trình cấp nguyên tố. Burnside chỉ ra rằng, nếu một nhóm đơn không aben có cấp lẻ, thì cấp đó phải ít nhất là 40000, và có không ít hơn 7 thừa số nguyên tố. Từ đó ông tin rằng, nhóm đơn không aben cấp lẻ không tồn tại. Điều đó chỉ được chứng minh sau hơn nửa thế kỷ, trong công trình của Thompson và Feit “*Tính giải được của các nhóm bậc lẻ*” đăng trong tạp chí *Pacific Journal of Mathematics*, 1963. Mặc dù kết quả tuyệt vời như vậy, các tác giả đã bị từ chối nhiều lần, cuối cùng mới tìm được tờ tạp chí nhận đăng. Kết quả đó làm chấn động giới toán học, và người ta bắt đầu tin rằng, bài toán phân lớp tất cả các nhóm hữu hạn cuối cùng sẽ có thể được giải quyết. Nên nhớ rằng, vào năm 1920, Dickson, một trong những nhà nghiên cứu hàng đầu về nhóm hữu hạn đã tuyên bố: “*Lý thuyết nhóm hữu hạn đã chết!*”. Với kết quả trên, hai tác giả Thompson và Feit đã làm cho lý thuyết này “sống lại”, và họ được trao Giải thưởng Nelsson Cole năm 1965.



Các kết quả mà Thompson đạt được trong luận án cũng như trong các công trình nghiên cứu của ông có được không chỉ bằng cách sử dụng khéo léo và sâu sắc các kỹ thuật đã biết, mà quan trọng hơn là ông đã đưa ra nhiều phương pháp và ý tưởng mới, đặc biệt là các phương pháp mang bản chất hình học và tổ hợp. Những phương pháp của Thompson đã được ứng dụng để đưa đến nhiều thành tựu mới trong lý thuyết nhóm, đặc biệt dẫn đến việc hoàn thành chương trình phân lớp nhóm đơn hữu hạn, sau 100 năm phát triển của nó. Năm 1980, Goreinstein tuyên bố rằng, việc phân lớp nhóm hữu

hạn coi như đã được hoàn tất. Ông tính một cách sơ lược và thấy rằng, có khoảng 15 ngàn trang tạp chí đã giành cho vấn đề đó! Và người ta đặt câu hỏi: biết đâu trong tương lai sẽ xuất hiện những cách tiếp cận hoàn toàn mới, cách mạng đến bài toán phân lớp?

Thompson được trao Giải thưởng Fields năm 1970 vì các công trình của ông trong bài toán phân lớp nhóm đơn hữu hạn. Trong lời giới thiệu các công trình của Thompson, Brauer nói: *"Trước hết tôi muốn nhắc đến công trình chung của Feit và Thompson, mà tất nhiên đóng góp của Feit trong đó là không thể bỏ qua. Trong công trình đó, các tác giả chứng minh một giả thuyết nổi tiếng nói rằng mọi nhóm đơn hữu hạn không chu trình đều có cấp chẵn. Tôi không dám chắc ai là người đã có nhận xét đó đầu tiên. Năm mươi năm trước đây (1920), nó đã được nhắc đến như là một giả thuyết rất lâu rồi. Trong khi giả thuyết đó được nhắc đến trong các giáo trình về đại số, thì chỉ có thể nói rằng, không một ai làm gì cả, đơn giản là vì không ai có bất cứ ý tưởng nào để giải quyết nó. Thậm chí không thật rõ ràng là vấn đề có ý nghĩa gì không. Chỉ sau công trình của Feit và Thompson, người ta mới nhận thức được toàn bộ vấn đề... Công trình của Thompson mà hôm nay được vinh dự tặng Giải thưởng Fields là tiếp tục của công trình đầu tiên đó. Trong công trình này, ông xác định được những nhóm hữu hạn đơn tối thiểu, là các nhóm đơn mà các nhóm con thực sự của chúng là nhóm giải được. Thực ra, ông đã giải quyết vấn đề tổng quát hơn. Đó là các chuẩn tắc hoá của các nhóm con có cấp là lũy thừa của số nguyên tố... Đó là những kết quả đáng kể đầu tiên về các nhóm đơn. Nhiều hệ quả quan trọng chỉ ra rằng, bây giờ chúng ta đã có thể trả lời các câu hỏi về nhóm hữu hạn mà trước đây hoàn toàn chưa được nghiên cứu. Tôi chỉ xin nêu một hệ quả: một nhóm hữu hạn là giải được nếu và chỉ nếu mỗi nhóm con sinh bởi hai phần tử là giải được".* Brauer kết thúc bài giới thiệu: *"Trong cuộc đời, mỗi người sẽ đi đến một điểm mà khi đó họ ngạc nhiên thấy rằng họ vẫn còn đặt nhiều hy vọng vào cuộc sống, họ vẫn còn mong nhìn thấy những điều sẽ xảy ra. Với toán học cũng vậy. Tôi đã trải qua cái điểm mà tôi vừa nhắc đến. Tôi muốn nói rằng tôi mong được nhìn thấy lời giải của bài toán về nhóm đơn hữu hạn và phần mà tôi hy vọng là Thompson sẽ đóng góp trong đó. Nói chung, tôi muốn nhìn thấy những đỉnh cao tiếp theo mà các công trình tương lai của Thompson sẽ đạt đến".* Brauer từ trần năm 1977, và ông kịp nhìn thấy những đóng góp lớn lao tiếp theo cho bài toán phân lớp nhóm đơn hữu hạn, và đã thấy rõ ràng, bài toán đó hầu như sắp được giải quyết trọn vẹn.

Sau khi hoàn thành luận án xuất sắc với lời giải giả thuyết Frobenius, Thompson là trợ giảng tại đại học Harvard trong năm học 1961–1962, sau đó ông nhận được ghế giáo sư tại đại học Chicago năm 1962. Năm 1968 Thompson đến làm việc tại Cambridge, Anh, và nhận chức giáo sư ở đó vào năm 1970. Năm 1993, ông trở về Mỹ, làm giáo sư tại đại học Florida.

Từ sau năm 1970, Thompson quan tâm đến nhiều vấn đề rộng hơn. Ông có những đóng góp cơ bản vào lý thuyết mã. Công trình của ông về lý thuyết mã đã trở thành cơ sở cho lời giải một vấn đề tồn tại từ lâu, là sự kiện không tồn tại mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn bậc 10.

Trong những năm 80, Thompson xét “bài toán ngược của lý thuyết Galois”, tức là vấn đề xét xem những nhóm hữu hạn nào có thể là nhóm Galois. Lĩnh vực nghiên cứu này khởi đầu từ công trình của Hilbert, và công trình của Thompson được xem là bước tiến bộ quan trọng nhất kể từ thời Hilbert.

Ngoài Giải thưởng Fields, Thompson còn nhận được Giải thưởng Cole của Hội toán học Mỹ (1966); được phong Tiến sĩ danh dự đại học Illinois (1968); được bầu là Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ (1971); Tiến sĩ danh dự đại học Yale (1975); Viện sĩ Viện hàn lâm Hoàng gia Anh (1979); Giải thưởng Berwick của Hội toán học London (1982); Huy chương Sylvester của Viện Hoàng gia Anh (1987); Tiến sĩ danh dự đại học Oxford, Anh (1987); Giải thưởng Wolf (1992); Huy chương Poincaré của Viện hàn lâm khoa học Pháp (1992); Huy chương quốc gia về khoa học (Mỹ, 2000).

ENRICO BOMBIERI

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1974



Thông thường, một nhà toán học được trao Giải thưởng Fields vì một công trình (hoặc một loạt công trình) trong một lĩnh vực nào đó, cho dù họ có thể nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau. Enrico Bombieri là một trường hợp đặc biệt: Ông được tặng Giải thưởng Fields năm 1974 vì những đóng góp to lớn trong lý thuyết số (vấn đề phân bố số nguyên tố); lý thuyết các hàm đơn điệu và giả thuyết Bieberbach địa phương; lý thuyết hàm nhiều biến phức; lý thuyết phương trình đạo hàm riêng và các mặt cực tiểu; đặc biệt vì đóng góp trong vấn đề Sergei Bernstein chiều cao. Thật khó hình dung nổi một người có thể có những đóng góp to lớn như thế trong nhiều ngành khác nhau của toán học, khi đang ở tuổi 34. Sự đa dạng trong nghiên cứu của Bombieri đã trở thành rất nổi tiếng trong giới toán học. Ông đã nhiều lần thể hiện khả năng kì lạ trong việc nắm bắt những vấn đề khó nhất của một ngành khoa học mà ông vừa mới tìm hiểu, và nhanh chóng có những đóng góp cơ bản vào ngành đó.

Trong lĩnh vực số học, các công trình của Bombieri liên quan đến nhiều vấn đề khác nhau: lý thuyết hình học các số, chứng minh sơ cấp của định lý số nguyên tố, tổng đặc trưng trong trường hữu hạn, không điểm của các L -hàm, phương pháp sàng, phân bố số nguyên tố. Nổi bật nhất là các đóng góp trong “phương pháp sàng” và bài toán phân bố số nguyên tố.

Năm 1944, nhà toán học Nga Linnik đã đưa ra một “sàng”, là một bất đẳng thức cho phép nghiên cứu phân bố của một tập hữu hạn tùy ý các số nguyên trong một cấp số cộng. Tiếp theo các kết quả quan trọng của Rényi và Roth (Giải thưởng Fields năm 1954), Bombieri có nhiều đóng góp trong việc làm chính xác hơn các sàng (làm mịn các bất đẳng thức), và tìm thấy nhiều ứng dụng quan trọng của sàng trong lý thuyết số. Năm 1965, Bombieri đã sử dụng một dạng mạnh của sàng để chứng minh một kết quả mới và cơ bản về phân bố số nguyên tố trong một cấp số cộng. Kết quả đó, nổi tiếng với tên gọi “Định lý trung bình Bombieri”, là một bước đi xa hơn định lý kinh điển của Dirichlet về mật độ của các số nguyên tố trong một cấp số cộng nguyên thủy (là cấp số cộng mà công sai và số hạng đầu tiên không có ước chung khác 1). Các kết quả đó của Bombieri cũng đưa đến một cách tiếp cận mới cho giả thuyết về số nguyên tố sánh đôi (*tồn tại vô hạn số nguyên p sao cho p và $p+2$ đều là số nguyên tố*) và giả thuyết Goldbach (*mỗi số chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố*). Nghiên cứu về số nguyên tố sánh đôi tức là nghiên cứu về khoảng cách cực tiểu giữa hai số nguyên tố liên tiếp. Bombieri đã nghiên cứu vấn đề đó nhờ “định lý trung bình Bombieri” và đưa ra đại lượng E , theo đó bài toán số nguyên tố sánh đôi được giải nếu $E = 0$. Năm 1966,

Bombieri chứng minh rằng $E < 0,46650\dots$. Về sau, Bombieri còn đưa ra nhiều ước lượng về dần, và dẫn dắt đến rất gần giả thuyết Golbach.

Lĩnh vực thứ hai góp phần đưa đến Giải thưởng Fields cho Bombieri là bài toán các mặt cực tiểu (xem phân viết về Douglas, Giải thưởng Fields 1936). Bombieri nhận được các kết quả về mặt cực tiểu khi ông đến làm việc ở Pisa năm 1966. Vào thời điểm đó, De Grigori và nhóm của ông ở Pisa đã thu được nhiều kết quả về bài toán mặt cực tiểu chiều cao nhờ “lý thuyết hình học”. Một trong những đóng góp quan trọng của Bombieri theo hướng này là chỉ ra sự tồn tại của các điểm kỳ dị trên các mặt cực tiểu trong một trường hợp rất đẹp đẽ. Trước đó, người ta chỉ xét được các mặt cực tiểu không có kỳ dị. Theo các kết quả của De Grigori, Fleming, Almgren, không có các điểm kỳ dị trên các mặt cực tiểu chiều bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6. Bombieri xây dựng mặt 7 chiều trong không gian 8 chiều, là mặt cực tiểu và có điểm kỳ dị. Từ đó cũng suy ra sự tồn tại các điểm kỳ dị trên các mặt cực tiểu số chiều lớn hơn 7. Như vậy bản chất của bài toán Plateau (bài toán mặt cực tiểu) thay đổi khi qua số chiều 7. Điều này cũng thể hiện khi Bombieri chứng minh sự tồn tại của hàm f từ không gian $\mathbb{R}^8$ (không gian thực 8 chiều) vào không gian thực $\mathbb{R}$ mà đồ thị của nó là mặt cực tiểu nhưng không là siêu phẳng. Trước đây, Bernstein, De Grigori và nhiều người khác chỉ ra rằng, nếu số chiều không quá 7 thì trong trường hợp như trên ta có siêu phẳng.

Bombieri sinh ngày 26 tháng 11 năm 1940 tại Milan, Italia. Ông theo học với Ricci ở Milan và bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1963. Năm 1964 ông chuyển đến Trinity College ở Cambridge làm việc cùng với Davenport. Năm 1966 ông nhận được một ghế giáo sư ở Pisa và bắt đầu quan tâm đến bài toán Plateau. Từ năm 1977 ông là giáo sư tại Viện nghiên cứu khoa học cao cấp Princeton.

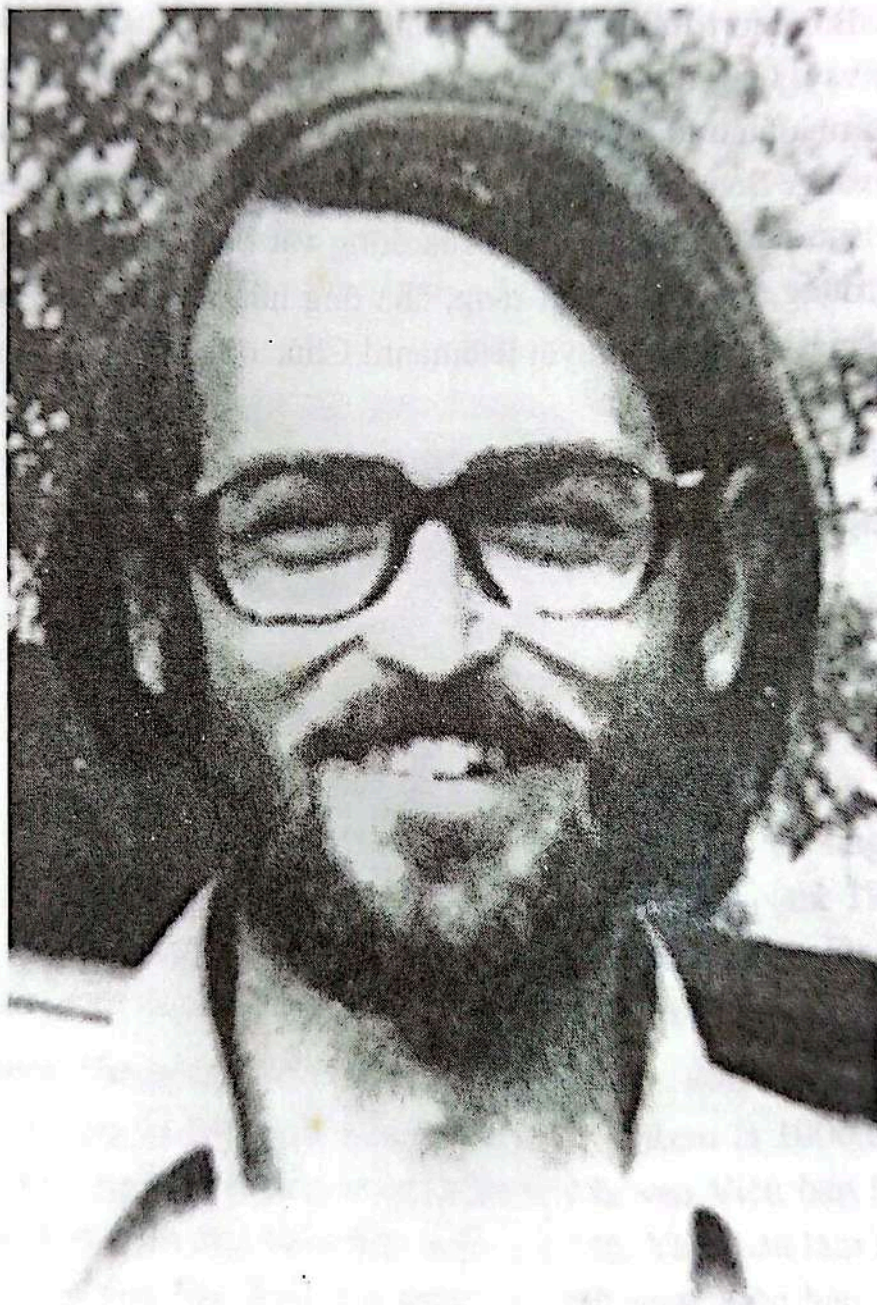
Ngoài Giải thưởng Fields năm 1974, Bombieri còn được tặng Giải thưởng quốc tế Balzan năm 1980 (giá trị bằng tiền của giải thưởng Balzan là 1000 000 phờ-răng Thụy Sĩ, tức là khoảng 800 000 đô la Mỹ); được bầu vào Viện hàn lâm khoa học Pháp năm 1984; Viện hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ; Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ; Viện hàn lâm quốc gia Quaranta ở Roma; Viện hàn lâm quốc gia Lincei, Roma; Viện hàn lâm khoa học, nghệ thuật và xã hội Châu Âu; Viện hàn lâm khoa học Thụy Điển. Ông được phong Hiệp sĩ cảnh cộ vàng hàn lâm Pháp; Hiệp sĩ Thập tự lớn Italia.

Bombieri không chỉ nổi tiếng về những công trình khoa học kiệt xuất, ông còn được biết đến như là một trong những bậc thầy của việc trình bày các vấn đề khó của toán học một cách dễ hiểu, viết những bài báo sâu sắc và dễ đọc về nhiều vấn đề của toán học.

Cũng giống như nhiều nhà toán học khác, Bombieri quan tâm đến toán học ngay từ khi còn nhỏ. Khi mới 13 tuổi, ông đã đọc các sách về lý thuyết số. Không chỉ trong toán học Bombieri mới quan tâm nhiều hướng khác nhau mà hình như ở ngoài đời cũng vậy. Ông đi du lịch và làm việc nhiều nơi, đến đâu cũng bổ sung kiến thức của mình qua trao đổi với đồng nghiệp. Ông rất thạo nấu ăn, và hiểu biết nhiều về rượu vang. Bombieri còn là cao thủ trong làng cờ, đánh bài poker, bài bridge, say mê sưu tầm tem và các vỏ của động vật biển, ham thích hội họa, đặc biệt là vẽ chân dung. Người ta đồn rằng, cha ông hứa thưởng cho ông một chiếc Ferrari nếu ông giải được giả thuyết Riemann! Chúc ông sớm nhận được chiếc ô tô đắt tiền đó!

DAVID BRYANT MUMFORD

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1974



David Mumford sinh ngày 11 tháng 6 năm 1937 tại Worth, Sussex, nước Anh, bố ông là người Anh, mẹ là người Mỹ. Ông thân sinh của Mumford làm việc cho Liên hợp quốc ngay từ năm 1945, khi tổ chức này mới thành lập.

Mumford nói rằng, bước ngoặt của cuộc đời ông xảy ra năm 1980, khi người vợ đầu tiên của ông, nhà thơ Erika Jentsch qua đời. Đối với ông, thời điểm đó không chỉ là bước ngoặt trong cuộc sống tình cảm, mà cả trong nghề nghiệp: Ông chuyển từ hình học đại số sang một lĩnh vực hoàn toàn mới- lý thuyết “hình mẫu” (Pattern theory). Tuy nhiên, Mumford cũng nói rằng, đó chỉ là sự trở lại niềm say mê ban đầu của ông với việc tìm hiểu cấu trúc của bộ não người. Theo Mumford, đó là lĩnh vực của toán ứng dụng, và trong đó các định lý trở nên không còn quan trọng nữa. Cho đến nay, các thành tựu của Mumford trong hai lĩnh vực hình học đại số và toán ứng dụng có thể xem là đã gần “cân bằng” nhau: ông viết 3 cuốn sách, 41 bài báo khoa học, hướng dẫn 17 nghiên cứu sinh về toán ứng dụng; 10 cuốn sách, 50 bài báo, hướng dẫn 28 nghiên cứu sinh về hình học đại số.

Giải thưởng Fields được trao cho ông năm 1974, vì các kết quả cơ bản trong hình học đại số.



Mumford học hình học đại số với Oscar Zariski ở đại học Harvard, vào thời mà Harvard đang là trung tâm hình học đại số hàng đầu của thế giới. Ông tốt nghiệp đại học Harvard năm 1957, và nhận bằng tiến sĩ tại đó năm 1961. Thời kì này đang có một trào lưu “đọc lại” các tác phẩm của những nhà hình học đại số Italia: Ở Matxcova có xêmina của Shafarevich (mà nhiều thành viên sau đó trở nên rất nổi tiếng như Manin, Moishezon, Tiurin,...), ở Harvard có xêmina của Zariski với Hironaka, Mumford,... Trong lịch sử phát triển của hình học đại số, “trường

phái Italia” với Enriques, Castelnuovo, Severi,... đã viết nên một trang đặc biệt, với nhiều kết quả sâu sắc về các mặt đại số. Điểm nổi bật trong các công trình của họ là những trực giác tinh tế và phong phú. Tuy nhiên, đã đến lúc nhìn lại “hình học

đại số Italia”, để thấy hết sự sâu sắc ẩn chứa sau những trực giác của họ, và cũng để hình học đại số có một diện mạo hiện đại hơn, chính xác hơn, với những công cụ mới và hiệu quả hơn. Kết quả quan trọng nhất của Mumford là chỉ ra một đặc trưng tôpô của tính không kỳ dị của một điểm trên mặt đại số. Ông chứng minh rằng, nếu tại một điểm P trên mặt đại số V mà V là đa tạp theo nghĩa tôpô, tức là có lân cận P đồng phôi với một mặt cầu, thì P là điểm không kỳ dị đại số. Tate, trong bài giới thiệu Mumford tại Đại hội toán học 1974 đánh giá công trình của Mumford là một bước ngoặt nối giữa những công trình trước đây về kỳ dị các đường cong phẳng với những sự phát triển rực rỡ tiếp theo. Brieskorn chứng minh rằng, kết quả trên của Mumford đối với các mặt đại số (số chiều 2) không đúng cho số chiều cao hơn. Những phương pháp đã dùng trong vấn đề nói trên được áp dụng hiệu quả trong việc xây dựng các mặt cầu 7 chiều trên đó có nhiều cấu trúc vi phân (xem bài về Milnor trong tập sách này).



Ông bà Mumford và đồng nghiệp với ban lãnh đạo Viện Toán học năm 2005

Kết quả quan trọng nhất mà Mumford đạt được trong hình học thuộc về lý thuyết đa tạp moduli, một lý thuyết nằm ở tâm điểm của hình học đại số. Nói một cách

thô thiển, các đa tạp moduli là các đa tạp mà mỗi điểm của nó là một lớp đẳng cấu của một đối tượng hình học nào đó, và như vậy, các lớp đẳng cấu của các đối tượng hình học được tham số hoá bởi các điểm của đa tạp moduli. Mumford đã thu được những kết quả cơ bản về sự tồn tại và cấu trúc của không gian moduli các phân thớ, không gian moduli các đa tạp aben, không gian moduli các đường cong. Ông cũng là người đầu tiên xét vấn đề đơn trị hoá các đường cong trong không gian p -adic (ngày nay được biết dưới tên gọi “đường cong Mumford”).



Mumford tại Viện toán học năm 2005

Từ sau năm 1980, Mumford rời bỏ hoàn toàn hình học đại số, và chuyển sang nghiên cứu “lý thuyết hình mẫu” (Pattern theory), với hy vọng tìm hiểu về hoạt động của bộ não người. Lý thuyết hình mẫu ra đời vào khoảng những năm 70 nhờ những tư tưởng của Ulf Grenander và trường phái của ông ở đại học Brown. Mục tiêu của lý thuyết là phân tích, trên quan điểm thống kê, các hình mẫu trong mọi “tín hiệu” sinh ra bởi thế giới thực tại, dù đó là hình ảnh, âm thanh, chữ viết, các gen di truyền hay là các chuỗi protein, các đầu mút giây thần kinh, các chuỗi thời

gian về giá cả hay thời tiết,... Lý thuyết hình mẫu đưa ra các kiểu hình mẫu và các tham số cần thiết để mô tả các hình mẫu tìm thấy trong một lớp tín hiệu, mà chúng thường xuất hiện trong những lớp khác. Tư tưởng cơ bản ở đây là tìm những mô hình ngẫu nhiên có thể thu tóm được tất cả các hình mẫu ta gặp trong tự nhiên, sao cho một mẫu ngẫu nhiên của các mô hình đó cũng “có vẻ như” là một mẫu của thế giới thực tại.

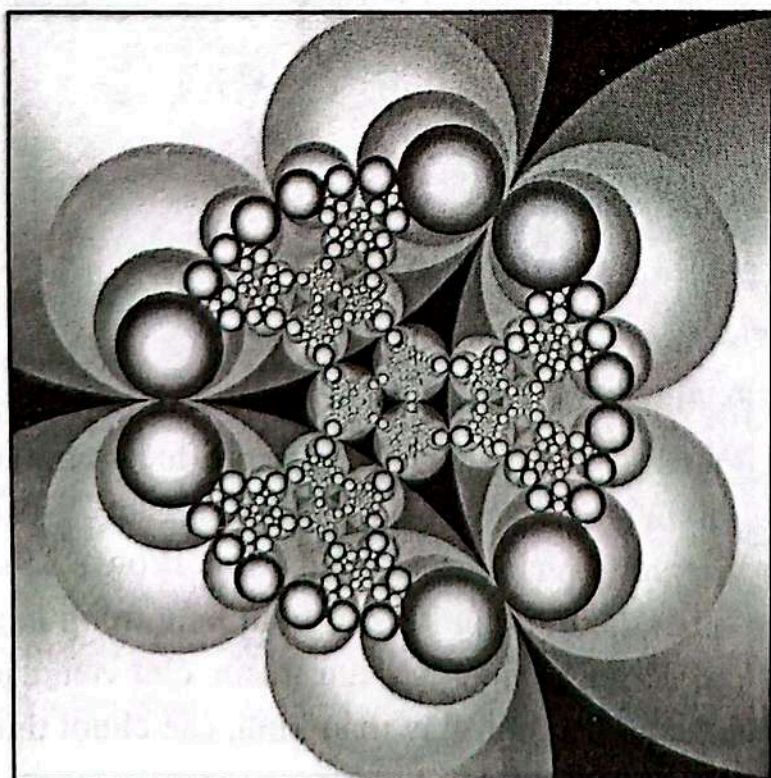
Năm 2002, Mumford được mời làm báo cáo toàn thể tại Đại hội toán học thế giới ở Bắc Kinh “*Lý thuyết hình mẫu: Toán học của nhận thức*”, trong đó ông giải thích lý thuyết hình mẫu như là một cách tiếp cận toán học đến lý thuyết nhận thức.

Mumford cho biết hai vấn đề mà ông quan tâm hiện nay là:

1) Để nhận dạng đối tượng, ta cần biết khi nào thì hai đối tượng *giống nhau*. Nhưng thế nào là giống nhau? Các nhà toán học xem tất cả các hình là các điểm của một không gian vô hạn chiều và xác định một khoảng cách (mêtric) trên đó. Như vậy, hai hình “giống nhau” là hai hình mà khi xem mỗi hình như một điểm thì khoảng cách giữa chúng rất nhỏ. Không gian đó có cấu trúc như thế nào? Ta có thể đưa vào không gian các khoảng cách khác nhau, nghiên cứu các đường trắc địa (ngắn nhất), độ cong, và áp dụng vào bài toán nhận dạng.

2) Ngày nay chúng ta đã hiểu biết nhiều hơn về vấn đề giải bài toán nhận thức trên máy tính. Tuy nhiên những ý tưởng đó có thực sự phản ánh quá trình xảy ra trong bộ não hay không? Nhiều vấn đề lớn đặt ra: vai trò của sự phản hồi, làm thế

nào mà nhiều giả định, giải thích có thể đồng thời xảy ra trong vỏ não,...



Lý thuyết hình mẫu sử dụng nhiều công cụ khác nhau của toán học và tin học. Một trong những quan điểm cơ bản của lý thuyết là: Các hiện tượng trong tự nhiên với sự “hỗn độn” thực ra được hình thành từ những quy luật hết sức đơn giản, lặp đi lặp lại nhiều lần, và mỗi lần lặp sẽ kèm theo một “nhiều” ngẫu nhiên. Chính điều đó làm nên

sự đa dạng của thế giới hiện thực, mặc dù quy luật cơ bản thì rất đơn giản. Để minh họa, Mumford vẽ “viên ngọc của Indra”, lấy ý tưởng từ kinh Phật. Ông nói rằng, các nhà toán học hay dùng từ “đẹp” để chỉ những chứng minh hay, nhưng thực ra, toán học có thể cũng “đẹp” trong con mắt của bất kỳ người nào, theo nghĩa thông thường của từ đó! Viên ngọc Indra là một minh chứng.

Mumford từng giữ chức Chủ nhiệm khoa Toán đại học Harvard (1981–1984); Phó Chủ tịch (1991–1994), Chủ tịch (1995–1998) của Hội toán học quốc tế. Ông được bầu là Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ (1975), Viện hàn lâm quốc gia Lincei, Roma (1991), Hội viên danh dự Hội toán học London (1995). Mumford được phong Tiến sĩ danh dự Đại học Warwick (Anh, 1983), Đại học khoa học và công nghệ Trondheim (Na Uy, 2000), Đại học Rockefeller (Mỹ, 2001).

Mumford đã đến thăm Việt Nam năm 2005.

PIERRE RENÉ DELIGNE

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1978



Có thể nói, Deligne là học trò giỏi nhất của Grothendieck. Người ta còn đồn rằng, khi hỏi Grothendieck lý do rời bỏ toán học, ông nói rằng bây giờ Deligne đã có thể thay ông làm tất cả mọi thứ! Mặc dù là một câu đùa, nhưng trong đó không phải là không có ít nhiều sự thật: Deligne nhận Giải thưởng Fields với việc chứng minh giả thuyết Weil, một trong những bài toán khó nhất, mà chính Grothendieck cũng bỏ khá nhiều công mà chưa thu được kết quả.

Pierre Deligne sinh ngày 3 tháng 10 năm 1944 ở Etterbeek thuộc Brussels, nước Bỉ. Ngay từ năm 14 tuổi, Deligne đã bắt đầu đọc các tập thuộc bộ sách *Cơ sở toán học* của nhóm Bourbaki, do thầy giáo Nijs của trường trung học đưa cho. Tập sách của Bourbaki nhằm viết lại toàn bộ toán học hiện đại trên một nền tảng logic chặt chẽ. Vì thế, sự trình bày ở đó hết sức trừu tượng, chẳng hạn số thực được đề cập đến trong chương thứ tư, sau khi đã trình bày về tô pô đại cương và đại số trừu tượng. Nhìn toàn thể, tập sách ít có những lý giải về ý nghĩa vấn đề, khái niệm, mà chú trọng đến logic nội tại. Vì thế, người đọc cần phải có một khả năng nắm bắt nhanh và chắc chắn các vấn đề trừu tượng nhất. Với việc tiếp thu vững chắc các kiến thức trình bày trong tập Bourbaki ở lứa tuổi 14, Deligne đã thể hiện một tài năng toán học kiệt xuất. Thầy Nijs quả là đã không đánh giá nhầm cậu học trò trung học của mình. Về sau, Deligne cũng nói rằng, một trong những người có vai trò quan trọng trong sự trưởng thành của ông chính là thầy giáo Nijs từ thời trung học. Năm 1962, Deligne vào học tại đại học Brussels, khi đã nắm vững cơ sở của toán học hiện đại, và theo học với Jaques Tits, một nhà lý thuyết nhóm nổi tiếng. Trong năm học 1965–1966, theo lời khuyên của Tits, ông sang Paris theo học tại Ecole Normale Supérieure, rồi trở về nhận bằng cử nhân của đại học Brussels. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ tại Brussels năm 1968, rồi luận án tiến sĩ quốc gia tại đại học Nam Paris (Orsay) năm 1972.

Ở Paris, Deligne được sống trong không khí toán học tuyệt vời, với những bài giảng của Grothendieck (giải thưởng Fields 1966) về hình học đại số, và của Serre (Giải thưởng Fields 1954) về lý thuyết số. Người ta kể lại rằng, chưa bao giờ thấy Grothendieck say sưa như khi nói về Deligne, người học trò mới của mình. Mới ngoài hai mươi tuổi, Deligne đã được Grothendieck xem như người ngang hàng với mình. Thời kỳ mà Deligne bắt đầu cùng làm việc với Grothendieck, khoảng những năm 60, chính là thời kỳ mà Shafarevich ở Matxcova, Zariski ở Harvard, Weil và Serre ở Princeton, Grothendieck ở IHES (Viện nghiên cứu khoa học cao cấp) đưa ra một chương trình nhằm nâng hình học đại số lên một mức độ trừu tượng mới, trên nền tảng logic vững chắc, tiếp theo thời kỳ phát triển rực rỡ của

lĩnh vực này với trường phái Italia nổi tiếng. Theo Mumford, Grothendieck là người nổi bật nhất trong việc đưa mọi khái niệm đến mức tổng quát nhất có thể, là người làm thay đổi hoàn toàn diện mạo của hình học đại số. Có vẻ như Deligne làm chủ được các cấu trúc của Grothendieck không khó khăn gì. Ông luôn luôn đưa ra những ý tưởng mới cơ bản và đẹp đẽ để làm sáng tỏ vấn đề, và những ý tưởng của ông thường rất độc đáo. Mumford nói một cách ví von, nếu như cần phải vượt qua một thung lũng thì Grothendieck, một con người không biết mệt mỏi với sức mạnh gần như một sự cuồng tín, sẽ lấp đầy thung lũng, còn Deligne chắc sẽ tìm cách bắc qua thung lũng một cái cầu!

Chỉ ít năm sau khi sang Pháp làm việc, Deligne đã có những đóng góp cơ bản trong nhiều lĩnh vực khác nhau của hình học đại số. Nổi bật nhất là chứng minh giả thuyết cuối cùng và là giả thuyết khó nhất của André Weil về hàm zeta trên đa tạp đại số. Vấn đề có nguồn gốc từ xa xưa: Xét số nghiệm của một phương trình, hay một hệ phương trình đại số. Tập hợp các nghiệm của một hệ phương trình đại số được gọi là một đa tạp đại số. Nếu ta xét các nghiệm không phải là thực hay phức, mà trên trường hữu hạn với đặc số p , ta có một mối liên hệ giữa số nghiệm N_p với số Betti thứ nhất của đa tạp (có thể hình dung số Betti thứ nhất là số các đường cong đóng độc lập trên đa tạp). Đây là một mối liên hệ sâu sắc giữa các tính chất đại số, số học và tính chất tô pô của đa tạp. Người ta xây dựng một hàm ứng với đa tạp đại số, mà nếu biết hàm này, ta biết số điểm của đa tạp trên trường có p' phân tử, tức là biết số nghiệm của hệ phương trình đại số đã cho "theo môđul p ". Hàm như vậy gọi là zeta hàm Riemann ứng với đa tạp đại số. Đây có thể xem là một tương tự của zeta hàm Riemann cổ điển. André Weil phát biểu một số giả thuyết về zeta hàm của đa tạp đại số. Giả thuyết đầu tiên về tính hữu tỷ (thương của hai đa thức) được Bernard Dwork chứng minh năm 1959, và Grothendieck chứng minh lại bằng cách khác vào năm 1964. Đồng thời, Grothendieck cùng với Artin đã phát triển lý thuyết đối đồng điều étale để làm công cụ chứng minh các giả thuyết Weil. Tuy nhiên, phải đợi đến Deligne thì giả thuyết khó nhất trong các giả thuyết Weil mới được chứng minh: đó là giả thuyết cho một ước lượng về hệ số của hàm zeta Riemann của đa tạp đại số. Giả thuyết này còn được gọi là "giả thuyết Riemann đồng dư", vì nó tương tự với giả thuyết Riemann cổ điển (mà đến nay vẫn chưa được chứng minh). Năm 1973, Deligne công bố chứng minh của giả thuyết Weil trong một loạt gồm 6 bài giảng tại Hội nghị ở Cambridge (20 năm sau, năm 1993, Andrew Wiles cũng công bố chứng minh định lý lớn Fermat trong một hội nghị ở Cambridge, với một loạt ba bài giảng). Chứng minh đó về sau được

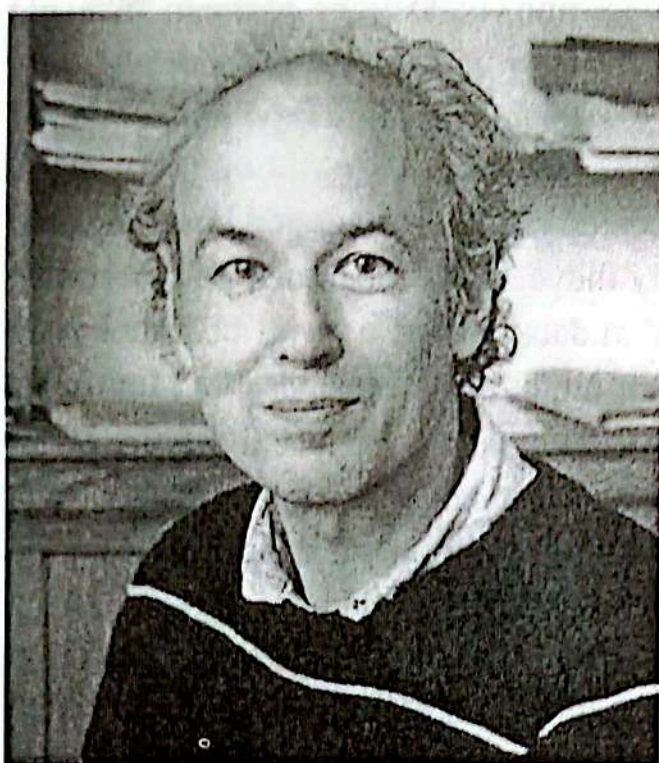
in thành một bài báo dài 150 trang trong “Công bố của viện IHES, 1974”. Trong chứng minh của mình, Deligne sử dụng gần như tất cả những thành tựu cao nhất của hình học đại số, tôpô, số học vào thời kì đó. Ông cũng chứng tỏ rằng, từ giả thuyết Weil cũng suy ra lời giải giả thuyết Ramanujan nổi tiếng trong số học về đánh giá môđun các hệ số của một dạng môđula trọng số 12. Công trình chứng minh giả thuyết Weil đã mang lại cho Deligne Giải thưởng Fields năm 1978. Trong bài phát biểu của Jacques Tits về công trình của Deligne có đoạn: *“Các giả thuyết đó (của A. Weil) vừa đặc biệt khó khăn (những chuyên gia giỏi nhất như Grothendieck cũng đã từng cố gắng giải quyết), vừa rất hấp dẫn vì những hệ quả tiếp theo của việc giải quyết chúng”*.

Sau chứng minh giả thuyết Weil, Deligne còn có rất nhiều đóng góp lớn trong hình học đại số, số học và tôpô, đặc biệt là về lý thuyết Hodge, bài toán Hilbert thứ 21 (giải phương trình vi phân khi biết nhóm đơn đạo, được giải quyết bởi Anosov và Bolibruch năm 1994), lý thuyết không gian moduli (xem bài viết về Mumford), biểu diễn Galois, L -chuỗi và giả thuyết Langlands (xem bài về Drinfeld, Laforge), biểu diễn các nhóm đại số. Đặc biệt, các ý tưởng về “môđiv” của Grothendieck đã được Deligne phát triển thành một lý thuyết đang ngày càng có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của hình học đại số, số học.

Năm 2004, Pierre Deligne được tặng Giải thưởng Balzan “Vì những cống hiến to lớn trong nhiều lĩnh vực của toán học (như hình học đại số, lý thuyết số đại số và giải tích, lý thuyết nhóm, tôpô, lý thuyết Grothendieck về các môđiv), làm phong phú thêm các lĩnh vực đó với những công cụ mới và mạnh mẽ, những kết quả tuyệt vời, như chứng minh đáng kinh ngạc giả thuyết Riemann trên trường hữu hạn (giả thuyết Weil)”. Balzan là giải thưởng rất danh giá giành cho những người đạt thành tựu xuất sắc trong khoa học và phục vụ công cộng. Trong lĩnh vực toán học, những người được Giải thưởng Balzan trước Deligne đều là những nhà toán học kiệt xuất, trong đó có A.N.Kolmogorov, E.Bombieri, J.-P.Serre, A.Borel, M.Gromov. Deligne đã giành một nửa số tiền thưởng (khoảng 400 000 đô la Mỹ) để lập một quỹ giúp đỡ những nhà toán học trẻ của Nga, Bêlôruxia và Ucraina. Người được tài trợ của Quỹ Deligne sẽ được nhận 500 đô la Mỹ mỗi tháng, trong 3 năm, nếu làm việc hơn 4 tháng mỗi năm tại các nước thuộc Liên Xô trước đây.

Trong buổi trao Giải thưởng Balzan ngày 7 tháng 9 năm 2004, Tits nói rằng, điểm đặc biệt trong tư duy của Deligne là khi gặp một vấn đề hay một lý thuyết mới, ông có ngay những ý tưởng cơ bản, và có thể thảo luận, sử dụng lý thuyết đó như đã biết nó từ lâu. Deligne sẵn sàng thích nghi ngay với ngôn ngữ của người đối

thoại với mình, và vì thế, sự hiểu biết và quan tâm của ông hết sức đa dạng. Pierre Deligne đã viết hơn 100 công trình, mà phần lớn là dài nhất có thể (trong khuôn khổ cho phép của các tạp chí, như bài báo dài 150 trang khổ lớn mà ta nhắc đến ở trên). Đó là chưa nói đến việc, Deligne có thói quen không bao giờ viết hai lần về cùng một vấn đề, thậm chí nhiều ý tưởng của ông chưa bao giờ được viết thành bài báo.



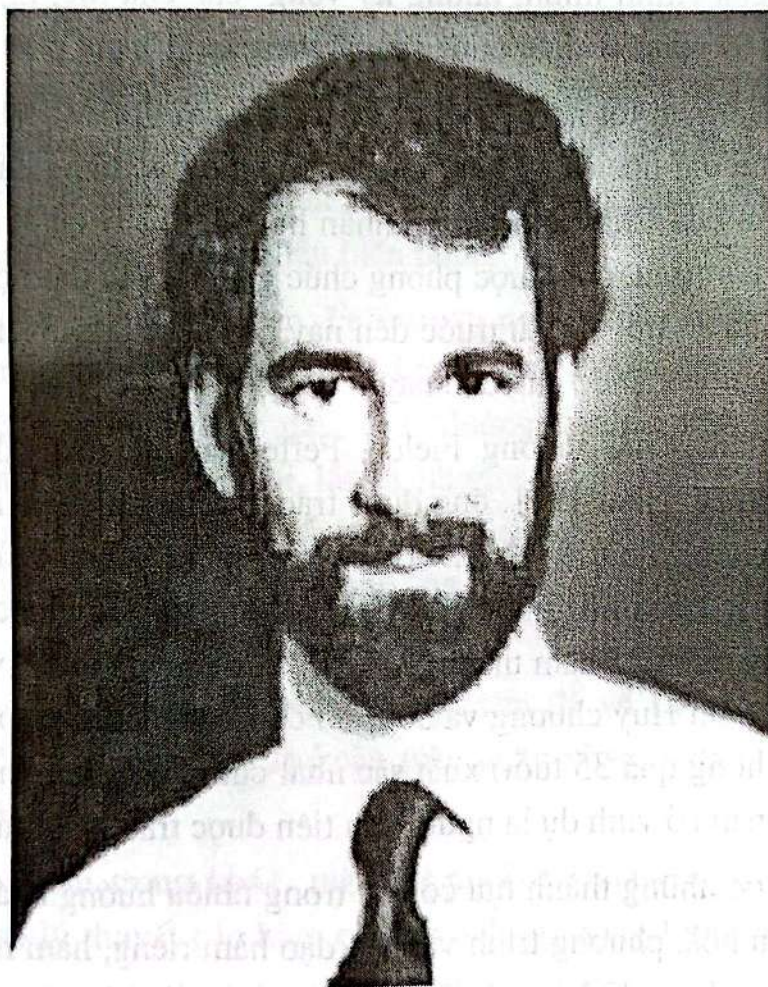
Bề ngoài, Deligne có vẻ như làm việc rất “dễ dàng”. Ở Princeton người ta nói đùa rằng, “lịch làm việc một ngày” của Deligne thường là như sau: buổi sáng, đến Viện đọc tờ “Le Monde” (báo Pháp “Thế giới”), ngửa cổ ngắm trần nhà một lúc, buổi chiều đọc “International Herald Tribune” (báo Mỹ “Diễn đàn thông tin quốc tế”), sau đó ra chợ mua cho vợ cái gì đó!

Deligne được phong giáo sư của Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES) năm 1970, khi mới 26 tuổi. Từ năm 1984, ông là giáo sư của Viện nghiên

cứu cao cấp ở Princeton. Ngoài Giải thưởng Fields và Giải thưởng Balzan, Deligne còn nhận nhiều giải thưởng cao quý khác: Giải thưởng Francois Deruyts của Viện hàn lâm Hoàng gia Bỉ (1974), Huy chương Henri Poincaré của Viện hàn lâm khoa học Pháp (1974), Giải thưởng Crafoord của Thụy Điển (cùng với Grothendieck). Deligne là Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Pháp (1978), Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ (1978), Viện hàn lâm Hoàng gia Bỉ (2004), Tiến sĩ danh dự các đại học Flemish (Brussels, 1989), Ecole Normale Supérieure (Paris, 1995).

CHARLES LOUIS FEFFERMAN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1974



Charles Fefferman nổi tiếng là một “thần đồng” toán học. Ông sinh ngày 18 tháng 4 năm 1949 ở thủ đô Oasinhton, và đã thành thạo các phép tính vi tích phân trước khi tròn tuổi 12. Năm 14 tuổi, ông vào học tại đại học Maryland, và may mắn gặp những người thầy biết nuôi dưỡng và phát huy khả năng bẩm sinh của ông. Thực ra, phần lớn các “thần đồng” không trở thành thiên tài như người ta tưởng, một phần vì “thần đồng” không phải bao giờ cũng là dấu hiệu của tài năng xuất chúng, phần khác vì ít thần đồng được giáo dục, chăm sóc một cách đúng đắn. Thay vì trở thành người sớm thành đạt, họ lại dễ dàng bị rơi vào tâm trạng thất vọng, khi thấy những ảo tưởng của chính mình, những kỳ vọng của cha mẹ, người thân tan vỡ. Fefferman là một trong số ít thần đồng mà tài năng ngày càng phát triển rực rỡ.

Năm 17 tuổi, Fefferman tốt nghiệp xuất sắc trường đại học Maryland, và đến làm nghiên cứu sinh tại đại học Princeton, một trường đại học hàng đầu của nước Mỹ, dưới sự hướng dẫn của Elias Stein. Ông nhận học vị tiến sĩ tại Princeton, khi vừa tròn 20 tuổi. Hai năm sau, ông được phong chức giáo sư của đại học Chicago, và ở tuổi 22, ông là giáo sư trẻ nhất từ trước đến nay của nước Mỹ. Năm 1973, ông trở lại Princeton và làm việc ở đó cho đến nay.

Trước khi được tặng Giải thưởng Fields, Fefferman đã nhận được nhiều giải thưởng danh giá khác. Năm 1971, ông được trao giải thưởng Salem giành cho các nghiên cứu về chuỗi Fourier. Năm 1975 ông nhận được Giải thưởng Alan Waterman của Quỹ khoa học quốc gia. Giải thưởng này do Quốc hội Mỹ đặt ra năm 1975 nhân kỷ niệm 25 năm thành lập Quỹ, và được mang tên vị giám đốc đầu tiên. Giải thưởng gồm Huy chương và 500000 đô la Mỹ, được trao cho những nhà nghiên cứu trẻ (không quá 35 tuổi) xuất sắc nhất của các ngành khoa học tự nhiên và xã hội. Fefferman có vinh dự là người đầu tiên được trao giải thưởng này.

Fefferman đạt được những thành tựu cơ bản trong nhiều hướng khác nhau của giải tích: giải tích điều hoà, phương trình vi phân đạo hàm riêng, hàm nhiều biến phức. Các lĩnh vực đó là những lĩnh vực truyền thống của giải tích, và những vấn đề tồn tại thường rất phức tạp và khó khăn. Một trong những đóng góp quan trọng của Fefferman là lời giải của một vấn đề trong giải tích phức nhiều biến: bao giờ thì hai miền trong không gian phức nhiều chiều “tương đương chỉnh hình” với nhau, tức là bao giờ tồn tại ánh xạ song chỉnh hình (chỉnh hình, và ánh xạ ngược cũng chỉnh hình) biến hai miền đó lên nhau. Trong trường hợp nhiều biến, bài toán này có bản chất khác hẳn trường hợp một biến. Theo định lý Riemann nổi tiếng, miền đơn liên (biên chỉ có một thành phần liên thông) trong mặt phẳng bao giờ cũng ánh xạ song chỉnh hình được lên hình tròn đơn vị, mặt phẳng đóng hay mặt phẳng

hở (tùy thuộc biên của miền có quá hai điểm, không có điểm nào hay có duy nhất một điểm). Do đó, hai miền đơn liên mà biên có quá hai điểm (tức là chứa một đoạn liên tục) sẽ có thể ánh xạ song chỉnh hình lên nhau. Khi số chiều lớn hơn một, tồn tại các miền đơn liên rất đơn giản không thể ánh xạ song chỉnh hình lên nhau (chẳng hạn hình cầu 2 chiều phức và hình “song trụ”). Nói cách khác, các miền trong số chiều cao “cứng” hơn, nên khó “nhào nặn” để miền này biến thành miền nọ. Người ta hy vọng rằng, các miền “giả lồi” với biên trơn sẽ tương đương song chỉnh hình với nhau. Bài toán với phát biểu đơn giản đó hoá ra hết sức khó khăn: nhiều nhà toán học nổi tiếng đã giành không ít thời gian cho nó mà không thu được kết quả nào. Năm 1974, Fefferman thành công trong việc chứng minh định lý về tính nhẵn trên biên, nó cho phép nghiên cứu ánh xạ trên biên đó. Chứng minh của ông rất khó, và nhiều người đã cố gắng đơn giản hoá nó, nhưng không thành công. Kết quả của Fefferman đã trở thành nền tảng cho nhiều ứng dụng phong phú trong lý thuyết hàm nhiều biến phức.

Liên quan đến công trình nêu trên, Fefferman nghiên cứu tính chất biên của các miền tương đương song chỉnh hình, và đưa ra một khoảng cách bất định (mêtric Lorentz). Đặc biệt, trong mêtric này, các “đường trắc địa không”, tương tự của các tia sáng trong thuyết tương đối, lập thành một tập hợp bất biến các đường cong trên biên. Như vậy, Fefferman đã đưa quan điểm mêtric bất định của hình học vi phân vào lý thuyết hàm phức. Triển vọng của những cách tiếp cận mới này là chưa thể dự đoán hết được.

Fefferman cũng chính là người chỉ ra rằng, vấn đề về sự hội tụ của các chuỗi Fourier một biến và nhiều biến là hoàn toàn khác nhau, ngược với những gì mà người ta tin trước đó.

Một phát minh quan trọng khác, mà nhờ nó Fefferman được trao Giải thưởng Fields, thuộc vào lý thuyết các hàm có “giao động trung bình bị chặn” (bounded mean oscillations, hay còn gọi là các hàm BMO) và không gian H^p gồm các hàm thuộc lớp L^p mà là giá trị biên của một hàm giải tích trong hình tròn bán kính bằng 1. Các không gian như vậy được gọi là không gian Hardy, theo tên của nhà toán học nổi tiếng người Anh. Cũng tương tự như các không gian L^p , khi $p > 1$, đối ngẫu của H^p là H^q , trong đó các số p và q thoả mãn $1/p + 1/q = 1$. Ta biết rằng, L^1 đối ngẫu với L^∞ , là không gian các hàm đo được bị chặn. Từ đó, người ta hy vọng rằng, đối ngẫu của H^1 là không gian các hàm là giá trị biên của các hàm giải tích

bị chặn trong hình tròn bán kính 1. Tuy nhiên điều đó không đúng. Năm 1971, Fefferman đã làm sáng tỏ sự kiện lạ lùng trên bằng cách chứng minh rằng, đối ngẫu với H^1 là không gian các hàm BMO, đã được F. John xây dựng từ 10 năm trước, khi nghiên cứu lý thuyết đàn hồi. Nói một cách thô thiển, BMO là hàm có độ lệch trung bình so với một hằng số trên mỗi đoạn là bị chặn. Các hàm BMO không nhất thiết bị chặn, tuy nhiên chúng chỉ có thể nhận những giá trị lớn trên một đoạn rất nhỏ.

Trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, Fefferman nổi bật với việc áp dụng những ý tưởng sâu sắc trong giải tích Fourier để giải quyết nhiều bài toán khó về sự tồn tại nghiệm. Các công trình của ông trong lĩnh vực này thể hiện sự kết hợp hiệu quả các phương pháp của giải tích phức nhiều biến với hình học vi phân và phương trình đạo hàm riêng.

Fefferman cũng có cách làm việc không giống ai. Ông thích ngồi hàng giờ trên ghế xôpha để suy nghĩ chăm chú, căng thẳng về hình, các quan hệ, biến đổi hơn là nghĩ về các số. Nhiều ý tưởng lần lượt hiện ra trong óc, và phần lớn là bị bác bỏ. Cho đến khi đi đến một ý tưởng nào đó có vẻ nhiều triển vọng, ông sẵn sàng bắt tay vào viết bài báo. Tuy nhiên, trước đó, ông phải làm một việc gì đó, như thay tã cho con chẳng hạn! Fefferman viết rằng:

“Những ý tưởng không dễ tìm được. Nếu bạn may mắn làm việc với một ý tưởng đúng đắn nào đó, thì cũng phải rất lâu mới đến khi bạn biết rằng nó thực sự đúng. Ngược lại, nếu bạn đi lạc đường thì cũng phải rất lâu bạn mới nhận ra điều đó. Khi đó bạn sẽ phải thốt lên rằng, bạn đã làm việc nhiều năm trên một cái sai. Một nhà toán học tốt phải có dũng khí để làm việc rất nhiều, rồi vứt bỏ tất cả”.

Ngoài Giải thưởng Fields (1978) và các Giải thưởng Salem, Waterman đã nói ở trên, Fefferman còn nhận nhiều giải thưởng khác, trong đó có Giải thưởng Bergman “vì những đóng góp hết sức quan trọng trong nghiên cứu nhân Bergman và đã khởi xướng nhiều vấn đề trong lĩnh vực đó”.

Fefferman được bầu vào Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ (1972), Viện hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ (1979). Ông được tặng bằng Tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học: Maryland, Knox College, Bar-Ilan, Madrid.

GREGORI ALEKSANDROVIC MARGULIS

GIẢI THƯỜNG FIELDS 1978



Gregori Margulis nhận được Giải thưởng Fields nhờ những đóng góp có tính chất mở đường, mà theo Mostow, chiếu dọi ánh sáng mới lên một cấu trúc nổi liền hai phạm trù cơ bản và lâu đời nhất trong tư duy toán học: *liên tục* và *rời rạc*. Đặc biệt, ông phát hiện ra mối tương tác giữa các cấu trúc toán học liên tục là nhóm Lie với các cấu trúc rời rạc là các nhóm con dàn.

Thành tựu nổi bật đầu tiên của Margulis là chứng minh giả thuyết của Alte Selberg (giải thưởng Fields 1950) nói rằng, trừ một số ít trường hợp, các *nhóm con dàn* là các *nhóm số học* với các biến chỉ nhận giá trị nguyên. Vấn đề bắt đầu từ những công trình của Poincaré, Frick, Klein khi họ xét các diện Riemann: Nếu một diện Riemann có giống ít nhất bằng 2 (tức là xét về mặt tôpô, nó giống như một mặt cầu có gắn thêm ít nhất là 2 cái quai!) thì nhóm cơ bản của nó là một nhóm con rời rạc của nhóm $PSL_2(\mathbb{R})$ (nhóm các ma trận vuông cấp 2, phần tử là các số thực, lấy

thương theo nhóm con sinh bởi hai ma trận $\{\pm 1\}$). Điều này dẫn đến việc xét các nhóm con rời rạc của nhóm Lie. Poincaré đặt ra bài toán mô tả tất cả các nhóm con rời rạc có “đối thể tích” hữu hạn của nhóm Lie. Sau khi phát hiện ra rằng, nhóm $PSL_2(\mathbb{R})$ chứa các nhóm con rời rạc với đối thể tích hữu hạn mà không phải

là nhóm số học, người ta bắt đầu nghi ngờ về khả năng mô tả tất cả các nhóm con rời rạc với đối thể tích hữu hạn của nhóm Lie. Tuy nhiên, các ví dụ về những nhóm Lie có tính chất như trên không nhiều, và Selberg cùng với Piatetski-Shapiro đi đến giả thuyết rằng, hầu hết các nhóm Lie có tính chất: Nhóm con rời rạc của nó là nhóm số học. Margulis đã chứng minh trọn vẹn giả thuyết đó.

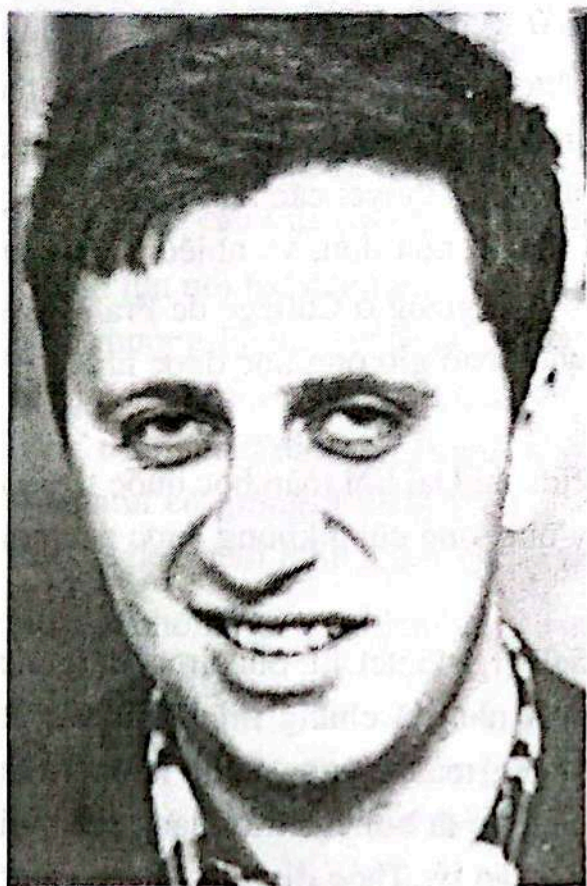
Chứng minh của Margulis được thực hiện qua rất nhiều giai đoạn, và trải dài trong nhiều năm. Một khâu quan trọng của chứng minh (tính tuần hoàn của các “quỹ đạo đóng”) được ông hoàn thành năm 1969, nhưng sau 2 năm mới công bố (một bài báo dài vồn vẹn 5 trang trong tạp chí toán học của Xibêri). Jacques Tits nói rằng, khi chứng minh đó xuất hiện, nó đã gây sự ngạc nhiên đặc biệt vì hết sức ngắn gọn, và không sử dụng công cụ gì phức tạp. Những phần tiếp theo của chứng minh được công bố vài năm sau đó. Cho đến Đại hội toán học quốc tế 1974 ở Vancouver, người ta tin rằng Margulis đã chứng minh xong giả thuyết Selberg, và mời ông đọc báo cáo toàn thể tại hội nghị. Tuy nhiên, vào thời gian đó, Margulis không được Nhà nước cử đi tham dự Đại hội, và ông đã gửi đến Đại hội một bản báo cáo với những kết quả hoàn toàn mới và bất ngờ, trong đó ông chứng minh giả

thuyết của Piatetski-Shapiro đặt ra tại Đại hội ở Mátxcova năm 1966. Với công trình đó, giả thuyết Selberg-Piatetski-Shapiro được chứng minh đầy đủ. Margulis đã đi đến chứng minh này bằng việc sử dụng một cách tài tình các kỹ thuật mạnh mẽ của lý thuyết ergodic, lý thuyết biểu diễn unita, lý thuyết các ánh xạ đo được, hình học đại số, lý thuyết cấu trúc các nhóm đại số nửa đơn, và nhiều lý thuyết khác! Tits nói rằng, trong năm học 1975-1976 ông giảng ở Collège de France về các kết quả của Margulis, và trong đời mình, chưa bao giờ ông học được nhiều về toán đến thế trong vòng một năm!

Năm 1978, Margulis được trao Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học quốc tế họp ở nước láng giềng Phần Lan. Nhưng cả lần này nữa, ông cũng không được phép đi dự Đại hội.

Ngoài các công trình chứng minh giả thuyết Selberg-Piatetski-Shapiro, Margulis còn có nhiều kết quả nổi bật khác, mà đặc biệt nhất là chứng minh giả thuyết Oppenheimer về các dạng toàn phương. Một dạng toàn phương thực không xác định, không suy biến được gọi là dạng hữu tỷ nếu nó là bội của một dạng mà mọi hệ số đều hữu tỷ. Dạng không hữu tỷ gọi là dạng vô tỷ. Theo định lý Meyer, một dạng toàn phương hữu tỷ của n biến, n ít nhất là 5, sẽ biểu diễn 0, tức là có bộ n giá trị nguyên của biến, không đồng thời bằng 0, sao cho giá trị của dạng tại đó bằng 0. Như vậy, nếu gọi mB là giá trị cực tiểu của mô đun của một dạng toàn phương B khi biến chỉ nhận giá trị nguyên không đồng thời bằng 0, thì $m(B) = 0$ nếu B là dạng hữu tỷ. Năm 1929, Oppenheimer phát biểu giả thuyết nói rằng, $m(B)$ cũng bằng 0 nếu B là dạng vô tỷ, $n \geq 5$. Giả thuyết Oppenheimer được Margulis chứng minh trọn vẹn năm 1986 (đúng với $n \geq 3$) sau hơn nửa thế kỷ tồn tại. Chính Margulis nói rằng, trong chứng minh này, ông đã sử dụng các phương pháp của lý thuyết giải tích các số, lý thuyết nhóm Lie và nhóm đại số, lý thuyết ergodic, lý thuyết biểu diễn, hình học các số, và một số lý thuyết khác.

Kết thúc bài giới thiệu các công trình của Margulis tại Đại hội 1978, Tits nhấn mạnh: "Margulis đã giải quyết trọn vẹn hoặc gần trọn vẹn nhiều bài toán quan trọng trong lý thuyết các nhóm con rời rạc của nhóm Lie, những bài toán có nguồn gốc sâu xa trong quá khứ và ảnh hưởng vượt ra ngoài bản thân lý thuyết. Có thể nói không ngoa rằng, trong nhiều trường hợp, ông đã làm các chuyên gia phải kinh ngạc vì đã giải những bài toán mà vào thời điểm đó hoàn toàn không có cách gì để tiếp cận. Ông đạt được điều đó nhờ làm chủ một kho tàng phong phú các kỹ thuật, được vận dụng một cách tài tình và khéo léo tuyệt vời. Những phương pháp mới



mẻ và mạnh mẽ do ông đề xướng đã có những ứng dụng quan trọng vượt ra ngoài lĩnh vực ban đầu, và vì tính tổng quát của chúng, không nghi ngờ gì nữa, chúng sẽ còn nhiều ứng dụng trong tương lai”.

Margulis sinh ngày 24 tháng 2 năm 1946 trong một gia đình Do Thái ở Matxcova. Ông tốt nghiệp trường đại học tổng hợp Lômonôxốp ở Matxcova năm 1967, rồi làm nghiên cứu sinh tại đó. Margulis bắt đầu sự nghiệp khoa học của mình bằng lý thuyết ergodic, và một trong những kết quả đầu tiên của ông đã nổi tiếng với tên gọi “định lý Kazdan–Margulis”. Năm 1968, ông nhận được giải thưởng của Hội toán học Matxcova giành cho các nhà toán học trẻ. Margulis bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1970,

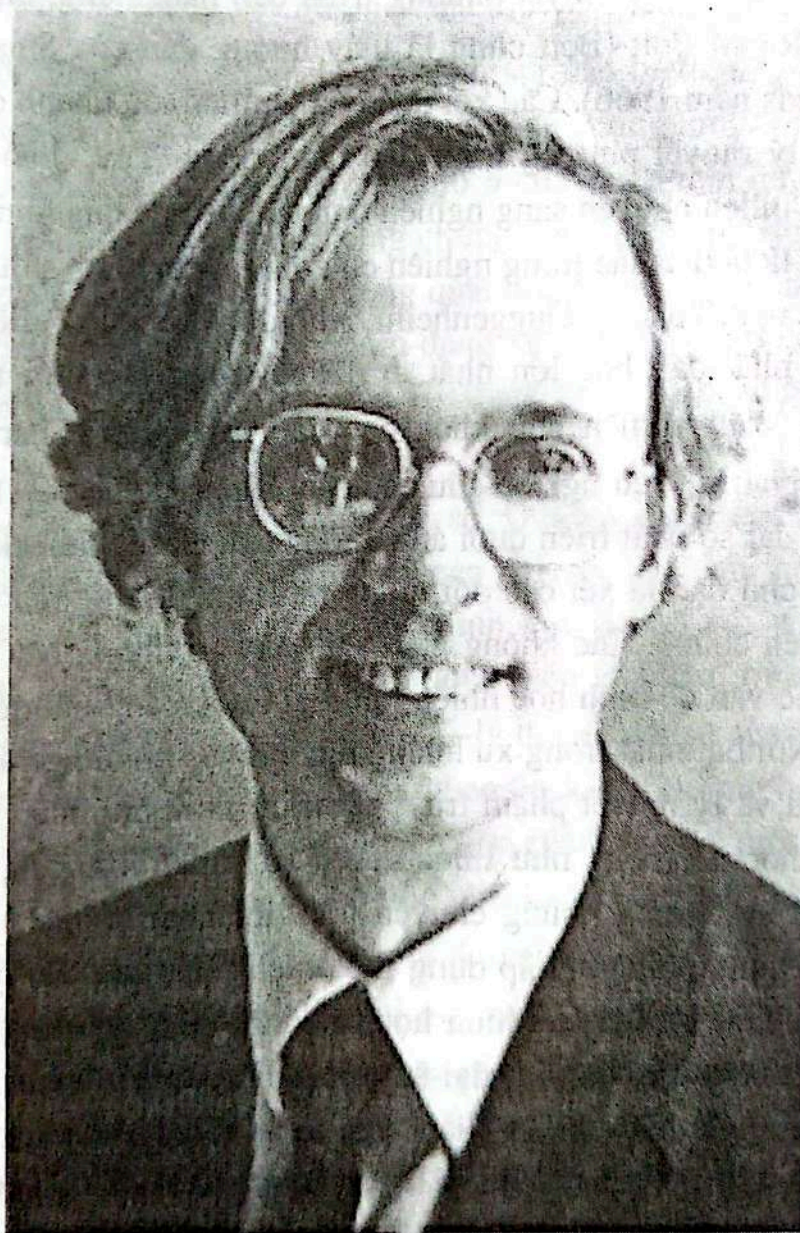
rồi làm việc tại Viện các vấn đề truyền thông tin (nếu đọc tiểu sử các nhà toán học nổi tiếng của Liên Xô trước đây, hẳn chúng ta sẽ phải ngạc nhiên vì một số khá lớn trong họ, đặc biệt những người gốc Do Thái, đã từng làm việc ở Viện này). Mặc dù được nhận giải thưởng cao nhất của toán học vào năm 1978, mãi đến năm 1980 Margulis mới được bảo vệ luận án tiến sĩ khoa học tại Liên Xô!

Từ sau khi nhận Giải thưởng Fields, Margulis đi thăm và làm việc tại nhiều trung tâm toán học của thế giới: Viện toán học Max–Planck ở Bonn, Collège de France ở Paris, Trường đại học Harvard, Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton. Từ năm 1991, ông nhận một chức giáo sư của đại học Yale (Mỹ).

Ngoài Giải thưởng Fields (1978), Margulis còn được tặng Huy chương của Collège de France (1991), Giải thưởng Humboldt, được bầu là Viện sĩ danh dự Viện hàn lâm Nghệ thuật và Khoa học Mỹ.

DANIEL GREY QUILLEN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1978



Daniel Quillen được tặng Giải thưởng Fields vì những đóng góp cơ bản trong đại số, đặc biệt là K-lý thuyết đại số, và trong tôpô. Những công trình của ông đã góp phần quan trọng trong việc giải quyết nhiều vấn đề khó khăn của hình học bằng phương pháp đại số.

Daniel Quillen sinh ngày 22 tháng 6 năm 1940 ở Orange, bang New Jersey, Mỹ. Cha ông là giáo viên vật lý ở trường trung học, mặc dù tốt nghiệp đại học với bằng kỹ sư hoá học. Quillen nhận bằng cử nhân của đại học Harvard năm 1961, và nhận học vị tiến sĩ năm 1964, cũng tại Harvard. Luận án của Quillen lấy đề tài từ những khía cạnh hình thức của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, được viết dưới sự hướng dẫn của Raoul Bott (Bott cũng là thầy hướng dẫn của Smale, người được Giải thưởng Fields năm 1966). Các kết quả của Quillen đã nhanh chóng trở thành nổi tiếng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Tuy nhiên, sau khi hoàn thành luận án, Quillen chuyển sang nghiên cứu các vấn đề của hình học và đại số. Do những thành tích xuất sắc trong nghiên cứu, ông nhận được sự tài trợ của nhiều quỹ rất danh giá như Sloan và Guggenheim. Nhờ đó, Quillen có điều kiện đến làm việc với những nhà toán học lớn nhất, ở những trung tâm nổi tiếng nhất, như Grothendieck ở Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES, Paris, 1968–1969, 1973–1974), Atiyah ở Viện nghiên cứu cao cấp Princeton (1969–1970). Vào thời kỳ đó, hình học đại số phát triển dưới ảnh hưởng của Grothendieck, mà một trong những tư tưởng chủ đạo là xét các đối tượng hình học thông qua các không gian hàm xác định trên chúng. Các không gian hàm này có những cấu trúc đại số đẹp đẽ, và vì vậy, các vấn đề hình học nhiều khi giải được bằng những công cụ mạnh mẽ của đại số. Nổi bật nhất trong xu hướng này là việc áp dụng các thành tựu của đại số đồng điều và lý thuyết phạm trù, phát triển từ những năm 1940, 1950 bởi nhiều nhà toán học nổi tiếng như Eilenberg, MacLane, Steenrod, Cartan. Daniel Quillen chính là một trong những chuyên gia giỏi nhất về đại số đồng điều và phạm trù. Ông không những đã áp dụng một cách hiệu quả các lý thuyết đó vào việc giải quyết nhiều vấn đề của hình học, mà còn mang lại cho chúng một đặc trưng hình học đơn giản. Nhờ đó, đại số đồng điều và lý thuyết phạm trù giảm được sự hình thức hoá thái quá từng làm nản lòng nhiều nhà toán học. Một trong những ứng dụng đầu tiên của Quillen là xây dựng một lý thuyết đối đồng điều “tốt” cho các vành giao hoán. Lý thuyết đó của Quillen đã được ứng dụng để nghiên cứu các biến dạng của cấu trúc trên các không gian hình học. Quillen đã áp dụng lý thuyết nhóm hình thức vào một lĩnh vực của hình học mà thoát nhìn tưởng như không có gì liên quan: lý thuyết cobordism của Thom (xem bài viết về

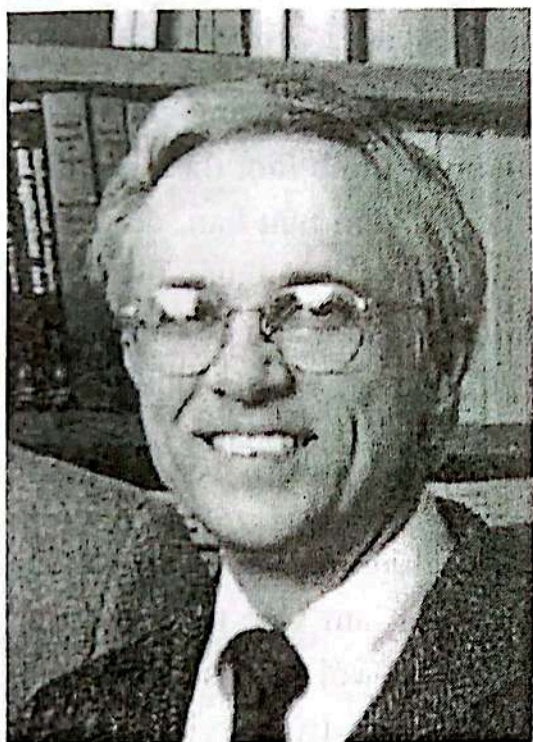
René Thom). Có lẽ một trong những biệt tài của Quillen là nhìn thấy mối liên quan trong những lĩnh vực khác nhau: Ông chỉ ra rằng, bằng các kết quả trong hình học đại số của Artin và Mazur, ta có thể chuyển giả thuyết nổi tiếng của Adams trong lý thuyết đồng luân về một dạng dễ giải quyết hơn. Về sau, chính một học trò của Quillen, Eric Friedlander đã giải quyết được giả thuyết đó. Về phần mình, Quillen cũng phát triển một phương pháp độc đáo, hoàn toàn mới để chứng minh giả thuyết Adams: Đó là lý thuyết biểu diễn môđul các nhóm hữu hạn. Lý thuyết này đã có ảnh hưởng quyết định trong việc Quillen sáng tạo nên một lý thuyết nổi tiếng, mang về cho ông Giải thưởng Fields : K -lý thuyết đại số.

Ta biết rằng, đối đồng điều nhóm là một chương đặc biệt quan trọng của đại số đồng điều. Trong hai công trình cơ bản, Quillen đã chứng minh một định lý mô tả cấu trúc của các vành đối đồng điều môđul p của các nhóm hữu hạn, đồng thời cho câu trả lời của nhiều vấn đề mở. Ông chứng minh các định lý thuần túy đại số như vậy về nhóm hữu hạn bằng cách tổng quát hoá thành các mệnh đề trên những không gian tôpô chịu tác động của nhóm đang xét. Chứng minh của Quillen một lần nữa minh họa cho “nguyên lý” của Hielbert: “đơn giản hoá bằng cách tổng quát hoá”.

Trong quá trình xây dựng K -lý thuyết đại số, Quillen chịu ảnh hưởng rõ rệt của Grothendieck, khi làm việc tại IHES, và của Atiyah, khi làm việc tại Princeton. Grothendieck là người đã “xây dựng lại” hình học đại số với việc sử dụng một cách có hệ thống các công cụ của đại số đồng điều và phạm trù. Atiyah đã cùng với Hirzebruch làm nên K -lý thuyết tôpô. K -lý thuyết đại số của Quillen tương tự như một sự phát triển các cấu trúc của Grothendieck cho trường hợp phạm trù các vành giao hoán. Khi áp dụng cho vành thích hợp các hàm trên một đa tạp đại số, ta nhận được các kết quả trùng với Grothendieck, còn nếu đó là vành hàm trên không gian tôpô, ta trở về trường hợp K -lý thuyết tôpô của Atiyah và Hirzebruch. Năm 1972, bằng những ý tưởng như khi giải giả thuyết Adams, Quillen đã thành công trong việc xây dựng các K -nhóm bậc cao, điều mà nhiều người trước đó đã bỏ nhiều công sức nhưng chưa làm được. Lý thuyết của Quillen đã được ứng dụng rộng rãi trong nhiều vấn đề của tôpô và đại số. Đặc biệt, áp dụng các kỹ thuật trong lý thuyết đồng luân, Quillen đã thành công trong việc đưa ra phương pháp tính toán các K -nhóm bậc cao.

Hyman Bass, khi giới thiệu công trình của Quillen tại Đại hội 1978, đã kết luận: “*Khi đọc lần đầu, ta thấy như hạ cánh xuống một hành tinh toán học mới và thân*

thiện....K-lý thuyết đại số bậc cao được xây dựng một cách hiệu quả ngay từ những nguyên lý đầu tiên, và trong 63 trang, đạt đến mức độ chín muồi mà thông thường ta chỉ hy vọng có được với sự nỗ lực của nhiều nhà toán học trong nhiều năm". Kể từ khi ra đời, K-lý thuyết đại số có vai trò đặc biệt trong nhiều lĩnh vực của tôpô vi phân và hình học. Nó cũng có mối liên hệ bất ngờ với lý thuyết đại số các số, khi xét luật thuận nghịch bậc cao và zeta hàm. Quillen còn sử dụng K-lý thuyết đại số để chứng minh một giả thuyết của Serre đặt ra năm 1955.



Nói về những điểm đặc sắc trong tư duy của Quillen, Bass nhấn mạnh: "Tài năng toán học thường được thể hiện trong việc giải quyết bài toán hoặc xây dựng lý thuyết. Hiếm thấy trường hợp như Quillen, khi mà ta có thể thích thú nhìn thấy những bài toán lớn, cụ thể, được giải quyết bằng những ý tưởng tổng quát với tầm nhìn và sức mạnh lớn lao, bằng sự hợp nhất các phương pháp từ những lĩnh vực khác nhau của toán học. Quillen có ảnh hưởng sâu sắc đến nhận thức và thói quen suy nghĩ của cả một thế hệ các nhà tôpô và đại số trẻ tuổi. Người ta đọc các công trình của ông không phải chỉ để biết, mà còn để tự soi sáng".

Khi Quillen nhận được bằng Tiến sĩ ở tuổi 24, ông và vợ ông, nghệ sĩ violôn Jean, đã có hai con (họ có cả thảy năm con). Sự phát triển sớm cả về toán học lẫn trong vai trò của một người cha đã làm cho Quillen sớm bạc tóc, nhưng không làm mất đi ở ông vẻ ngây thơ và sự khiêm tốn. Trong cuộc sống, ông có vẻ nhút nhát, không thích xuất hiện trước đám đông, nhưng lúc nào cũng có sẵn các định lý và các ý tưởng kì diệu.

ALAIN CONNES

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1982



Alain Connes cho rằng, toán học như một cơ thể sống, không thể tách rời từng bộ phận nếu muốn có sự phát triển bình thường. Vì thế, không có sự phân chia rạch ròi giữa giải tích với đại số, hình học, hay giữa “toán học liên tục” và “toán học rời rạc”, mà chỉ có một toán học duy nhất. Những nghiên cứu của Connes gần như là một minh chứng cho quan điểm đó: không thể nói ông là nhà hình học, giải tích, hay đại số, lý thuyết số, mà chỉ có thể nói ông là một trong những nhà toán học lớn nhất của thời đại chúng ta.

Ngày nay, mọi người đều biết đến Alain Connes như người đặt nền tảng cho một lý thuyết có vai trò quan trọng trong toán học và vật lý hiện đại: *Hình học không giao hoán*. Tuy nhiên, Giải thưởng Fields được trao cho ông năm 1982 không phải vì thành tựu trong hình học không giao hoán, đơn giản vì khi đó ông còn chưa khai sinh ra lý thuyết này!

Alain Connes sinh ngày 1 tháng tư năm 1947 ở Draguinan, vùng Var của nước Pháp. Là một cựu học sinh của trường Ecole Normale Supérieure nổi tiếng, ông làm nghiên cứu viên của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia Pháp (CNRS) từ 1970 đến 1974, rồi chuyển sang đại học Kingston (Canada) năm 1975. Từ 1976 đến 1980 ông giảng dạy tại đại học Paris 6, lúc đầu là phó giáo sư, sau là giáo sư. Đồng thời, từ năm 1979, Alain Connes nhận chức giáo sư của Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES) ở Bures-sur-Yvette, ngoại ô Paris. Từ năm 1981 đến 1984, ông là giám đốc nghiên cứu (chức vụ khoa học tương tự nghiên cứu viên cao cấp của Việt Nam), và từ 1984 đến nay giữ ghế giáo sư giải tích và hình học của Collège de France.

Alain Connes bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1973 ở Ecole Normale Supérieure, dưới sự hướng dẫn của Dixmier. Các kết quả trong luận án của ông về đại số toán tử Von Neumann đã lập tức trở thành những kết quả cơ bản trong lĩnh vực này. Đại số Von Neumann được xây dựng bởi Von Neumann và Murray từ những năm 30, 40 của thế kỷ 20, và là công cụ để xây dựng mô hình toán học cho các hệ cơ học lượng tử. Araki viết về vai trò của Connes trong lý thuyết đó: *“Lý thuyết các đại số toán tử, sau một thời gian ấp ủ một cách yên tĩnh trong sự cô lập, bắt đầu sự phát triển cách mạng khoảng những năm cuối của thập kỷ 60. Alain Connes bước vào lĩnh vực này đúng vào lúc mà những làn khói của giai đoạn đầu của cách mạng bắt đầu tàn lụi. Ông đã lập tức đưa lý thuyết này đến những thành tựu rực rỡ, vượt quá sự mong đợi của các chuyên gia”*.

Alain Connes nhận được Giải thưởng Fields năm 1982 chủ yếu nhờ các kết quả về phân loại các đại số Von Neumann. Nhưng cũng chính thời kỳ này, Connes bắt đầu nghiên cứu hình học vi phân. Sau một thời gian ngắn, ông sáng tạo nên lý thuyết không giao hoán của các đại số toán tử, và đưa những ý tưởng đó vào hình học. Dần dần, một hình học mới đã được xây dựng: *Hình học không giao hoán*. Những nền tảng của hình học không giao hoán bao gồm: hình học vi phân, đối đồng điều cyclic, đại số toán tử, K -lý thuyết.

Alain Connes luôn quan tâm đến các vấn đề được đặt ra bởi cơ học lượng tử và thuyết tương đối, những vấn đề làm xuất hiện các bài toán không giải quyết được của đại số và hình học cổ điển (giao hoán), nơi mà thứ tự các phép toán là không quan trọng. Trong cơ học lượng tử, khi đưa vào chiều mới, chiều thời gian, nhiều phép toán trở nên không giao hoán nữa, và cần phải áp dụng hình học không giao hoán. Hình học cổ điển dựa trên khái niệm điểm xác định bởi ba chiều của không gian. Trong cơ học lượng tử, khái niệm điểm nhường chỗ cho khái niệm “trạng thái”, có thể hình dung như là một đám mây các điểm, hay là ảnh của electron xung quanh hạt nhân nguyên tử. Hình học không giao hoán do Alain Connes đề xướng đã góp phần giải quyết nhiều vấn đề của cơ học lượng tử, đặc biệt là vấn đề “tái chuẩn hóa” để loại bỏ các giá trị vô hạn đối với khối lượng của một số hạt sơ cấp trong lý thuyết trường.

Hình học không giao hoán còn được Alain Connes áp dụng để tìm ra một cách giải bài toán khó nhất của số học, mà cũng có thể là khó nhất của toán học: *Giả thuyết Riemann về các không điểm của hàm zeta*. K. Sabbagh, trong một cuốn sách về Connes, viết: “Theo bất kỳ tiêu chí nào thì Alain Connes cũng là nhà toán học thông minh nhất thế giới. Trong số những nhà toán học nghiên cứu về giả thuyết Riemann, có rất ít người có thể tuyên bố mình hiểu được cách tiếp cận đặc biệt của Connes, nhưng nhiều người trong họ cảm thấy rằng, nếu có ai đó chứng minh được giả thuyết Riemann, thì người đó phải là Connes. Ông là con người với bộ óc có cỡ của một hành tinh!”

Alain Connes đã viết hơn 150 công trình, ngoài ra ông còn viết một số sách nói về tư duy toán học, trong đó có các cuốn “Vật chất của tư duy” (viết cùng với J-P. Changeux, một nhà sinh học chuyên nghiên cứu về hệ thần kinh) và “Tam giác tư duy” (viết cùng với M-P. Schutzenberger và A. Lichnerowicz).

Alain Connes từng khuyên sinh viên: “Để làm được cái gì đó mới mẻ trong toán học, điều quan trọng là phải giữ được một sự ngây thơ nào đó. Thiếu nó, bạn có

thể làm ra nhiều thứ rất đẹp về kỹ thuật, nhưng hoàn toàn không phải là một phát minh thực sự”.

Không thoả mãn vì đã phát minh ra một lĩnh vực mới của toán học, Alain Connes muốn giải phóng ngành khoa học của mình, toán học, khỏi áp lực của những phương trình yêu thích. Năm 1987, trong bài phát biểu nổi tiếng ở Trường Bách khoa Paris “Toán học hướng đến tương lai”, Alain Connes nhấn mạnh: *“Toán học là công cụ để phản ánh những gì phức tạp nhất của hiện thực, đặc biệt là để tạo ra các quan điểm”.*

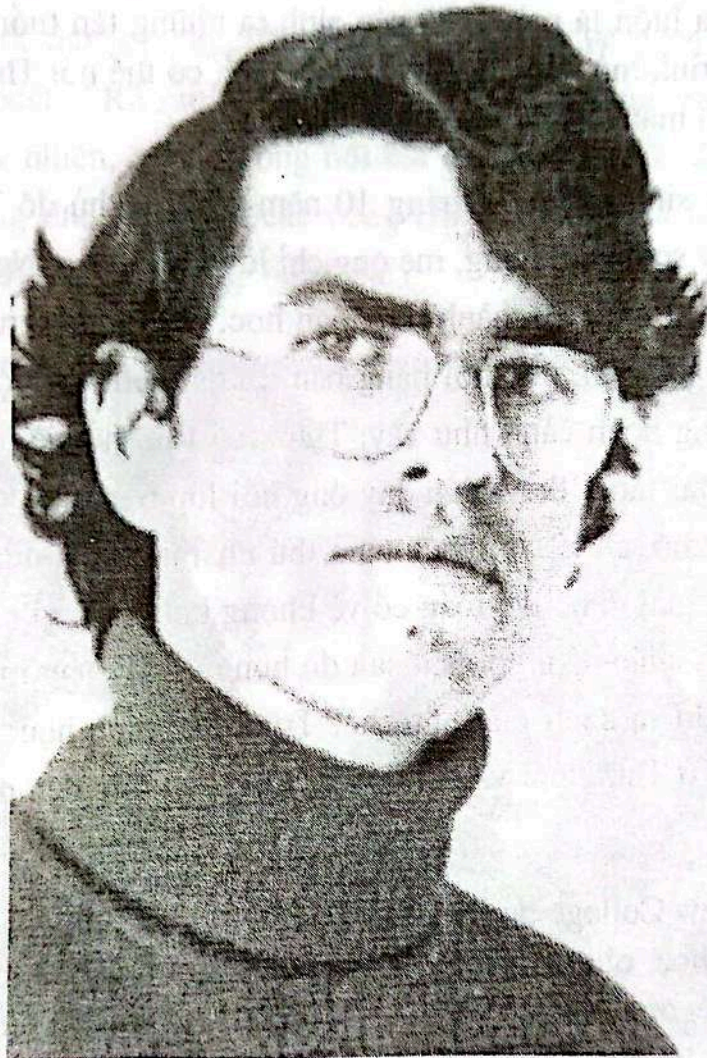
Trong đời làm khoa học của mình, hầu như năm nào Alain Connes cũng nhận được một giải thưởng cao quý hoặc một sự tôn vinh nào đó: Giải thưởng Aimé



Berthé của Viện hàn lâm khoa học Pháp (1975); Giải thưởng Peccot–Vimont của Collège de France (1976); Huy chương bạc của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia (CNRS) Pháp (1977); Giải thưởng Ampère của Viện hàn lâm khoa học Pháp (1980), Giải thưởng Fields (1982); Giải thưởng Clay (2000); Giải thưởng Crafoord của Viện hoàng gia Thụy Điển (2001); Huy chương vàng của CNRS Pháp (2004). Ông được phong tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học: Queen's University, Canada (1979); Roma, Italia (1997); Oslo, Na Uy (1999). Alain Connes được bầu là viện sĩ của nhiều viện hàn lâm danh giá: Viện hàn lâm khoa học hoàng gia Đan Mạch (1980); Viện hàn lâm khoa học Pháp (1983); Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ (1990); Viện hàn lâm khoa học Na Uy (1993); Viện hoàng gia Canada (1996); Viện hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ (1997); Viện hàn lâm khoa học Nga (2003).

WILLIAM PAUL THURSTON

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1982



Dù toán học có tạo ra những cấu trúc trừu tượng đến đâu thì mục đích cuối cùng vẫn là để hiểu rõ thế giới thực tại. Vì thế, khi ta xét các không gian chiều cao, thậm chí vô hạn chiều, thì cái đích mà ta đang hướng đến lại chính là không gian 3 chiều (hoặc là 4 chiều không-thời gian) mà trong đó chúng ta đang sống. Bởi thế nên tôpô các không gian 3 chiều luôn luôn chứa đựng những bài toán khó nhất chưa giải được, và luôn là mảnh đất sản sinh ra những tên tuổi lớn của toán học. Sau những công trình mở đầu của Henri Poincaré, có thể nói Thurston là người đã làm nên cuộc cách mạng mới trong tôpô 3 chiều.

William Thurston sinh ngày 30 tháng 10 năm 1946 ở thủ đô Washington, nước Mỹ. Cha ông là kỹ sư hàng không, mẹ ông chỉ lo việc nội trợ. Ngay từ khi mới 8, 9 tuổi, Thurston đã mơ ước trở thành nhà toán học. Thế nhưng trường nơi ông theo học lại dạy toán quá kém, đến nỗi hàng năm thường chỉ có một nửa số học sinh được lên lớp. Trong hoàn cảnh như vậy, Thurston vẫn thể hiện tài năng hình học hiếm có. Ông kể lại rằng, thầy giáo dạy ông hồi lớp 6 có thói quen ra những bài tập hình học quá khó, có lẽ sinh viên năm thứ nhất mới làm được. Vậy nhưng có một lần, Thurston giải được bài toán có vẻ không khó khăn gì trước con mắt nhìn kinh ngạc của thầy giáo. Chỉ có điều sau đó hơn nửa giờ ông mới giải thích được tại sao ông lại nghĩ ra cách giải như thế! Trục giác hình học tuyệt vời chính là điểm nổi bật nhất ở Thurston, và là nguyên nhân dẫn ông đến nhiều phát kiến kỳ lạ về sau.

Khi vào trường New College tại Sarasota, bang Florida, Thurston rất thích các môn sinh học, tâm lý học, nhưng các giáo sư ở đó khuyên ông nên theo môn toán. Tốt nghiệp năm 1967, ông chuyển đến làm nghiên cứu sinh tại đại học California ở Berkeley, dưới sự hướng dẫn của Morris Hirsch và Stephen Smale (Giải thưởng Fields năm 1966). Thurston bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1972 với đề tài "*Phân lá các đa tạp ba chiều phân thớ trên đường tròn*". Công trình này đã chỉ ra sự tồn tại các lá compact trong phân lá các đa tạp ba chiều. Với những người không phải là chuyên gia trong lĩnh vực tôpô 3 chiều, bản thân từ "phân lá" cũng đã nói lên một cách trực quan vấn đề đang xét: Đa tạp nhiều chiều được chia thành từng lớp rời nhau, tựa như những cái lá xếp lên nhau, mỗi lớp là một đa tạp với chiều giảm đi một đơn vị. Sự tồn tại phân lá không phải là điều dễ dàng. Có nhiều đa tạp có cái "cản trở", làm cho việc phân lá không thể thực hiện được. Chẳng hạn mặt cầu không thể phân lá thành các đường tròn: bao giờ cũng còn lại hai điểm cực. Lý do là vì mặt cầu có "đặc trưng Euler-Poincaré" bằng 2. Kết quả đặc biệt quan trọng của Thurston là chứng minh được rằng, cái cản trở duy nhất cho sự phân lá chính

là đặc trưng Euler–Poincaré, và do đó, những đa tạp có đặc trưng Euler–Poincaré bằng 0 đều có thể phân lá.

Sau khi hoàn thành luận án, Thurston làm việc một năm tại Viện nghiên cứu cao cấp Princeton. Sau đó, năm 1973 ông nhận chức trợ giảng tại Viện công nghệ Massachusetts. Năm 1974, ông được bổ nhiệm giữ chức giáo sư toán học tại đại học Princeton. Suốt thời kỳ này, Thurston nghiên cứu về phân lá. Về công trình của ông, Lawson viết : “Rõ ràng rằng đóng góp của Thurston vào lĩnh vực phân lá là rất sâu sắc. Tuy nhiên, cái làm ông nổi bật chính là sự độc đáo phi thường của ông. Điều đó cũng đúng đối với các công trình về sau của ông về không gian Teichmüller và lý thuyết các đa tạp ba chiều”.



Thurston đang hướng dẫn nghiên cứu sinh

Khi giới thiệu công trình của Thurston tại Đại hội toán học thế giới 1982 (mà thực tế là họp muộn hơn, vào năm 1983 ở Warsaw do tình hình không ổn định của Ba Lan thời kỳ đó), C. T. C. Wall nhấn mạnh: “Thurston có tầm nhìn và sự am hiểu hình học kỳ diệu: Các ý tưởng của ông đã cách mạng hoá hoàn toàn việc nghiên cứu tô pô trong các không gian 2 và 3 chiều, và đã mang lại sự tương tác mới và hiệu quả giữa giải tích, tô pô và hình học”.

Thurston là người đầu tiên chỉ ra sự tồn tại của một lớp rất rộng các không gian hyperbolic chiều 3, đó là các không gian thương của không gian hyperbolic theo

tác động của một nhóm giữ nguyên khoảng cách (nhóm đẳng cự). Trong trường hợp hai chiều, điều này đã được biết khá rõ: Khi đơn trị hoá hàm giải tích phức một biến, ta xây dựng các diện Riemann bằng cách lấy thương của mặt phẳng Poincaré theo một nhóm con rời rạc. Khi diện Riemann có giống lớn hơn 1, nó là không gian hyperbolic. Tuy nhiên, trong trường hợp chiều 3, người ta không tin là một cấu trúc như thế tồn tại. Đối với trường hợp chiều 3, Thurston trước hết xét các không gian phân thớ trên đường tròn với thớ là các mặt có giống lớn hơn 1. Ông cũng đưa ra mô hình hình học của không gian Teichmüller (không gian tham số hoá các diện Riemann).

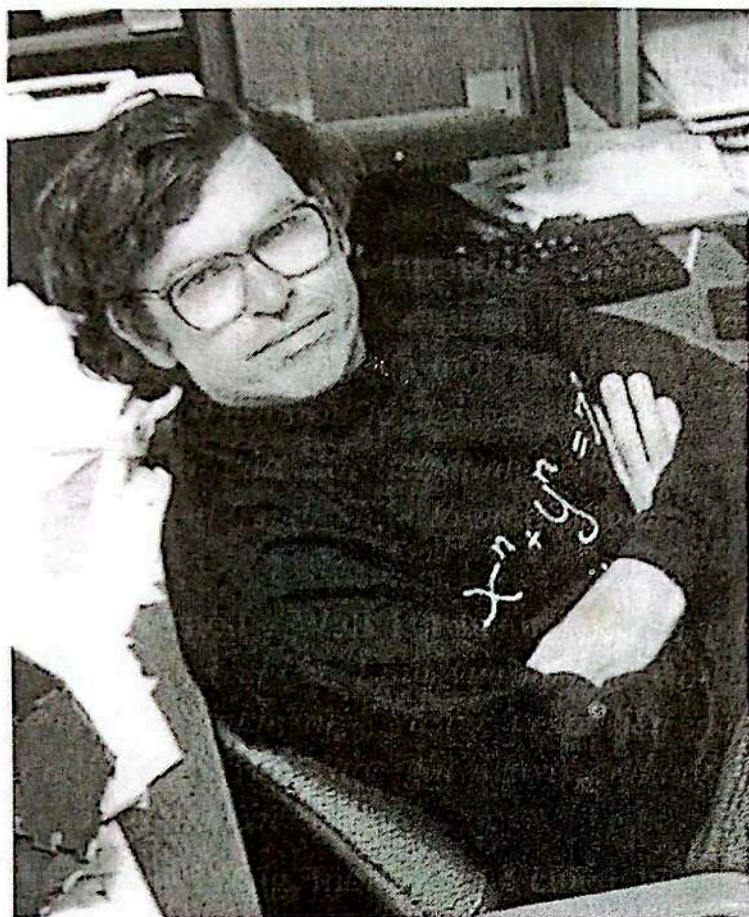
Các nhóm đẳng cự rời rạc của không gian hyperbolic 3 chiều được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Poincaré, mà ông gọi là nhóm Klein. Các nhóm này cũng được nhiều nhà giải tích nghiên cứu, mà định lý hữu hạn được Ahlfors (Giải thưởng Fields 1936) chứng minh là một trong những kết quả cơ bản. Công trình của Thurston về biến dạng của các nhóm Klein chứa đựng nhiều kết quả mới, đặc biệt về các tập giới hạn. Sullivan viết : *“Các kết quả của Thurston là đẹp và đáng ngạc nhiên. Phương pháp của ông đạt một tầm cao mới của giải tích hình học – theo nghĩa, một mặt là các ước lượng hình học mạnh mẽ, mặt khác là sự trực giác và tưởng tượng không gian thực sự ấn tượng”*.

Trong bài giới thiệu công trình của Thurston, Wall kết luận: *“Công trình của Thurston có ảnh hưởng to lớn trong tô pô 3 chiều. Lĩnh vực này có một truyền thống lâu đời của các kỹ thuật “thủ công thuần túy” và có ít mối liên quan với những vấn đề khác. Những lý luận trực tiếp vẫn được giữ nguyên, nhưng tô pô 3 chiều ngày nay đã hoà cùng dòng chính của toán học”*.

Thurston đưa ra giả thuyết rất tổng quát nói rằng, mỗi đa tạp 3 chiều, bất khả quy (nói một cách nôm na, không phân chia được thành 2 đa tạp rời nhau), không phải là xuyên, đều có cấu trúc hyperbolic. Ông đã chứng minh giả thuyết này trong một trường hợp riêng, mà trước đây gọi là các “đa tạp đủ lớn”, bây giờ Thurston gọi là các đa tạp Haken. Nếu giả thuyết của Thurston được chứng minh thì vũ trụ mà ta đang sống có cấu trúc hyperbolic. Điều này sẽ dẫn đến câu trả lời cho nhiều vấn đề như vũ trụ đang giãn nở hay co lại, v.v... Trong một bài viết về mô hình của vũ trụ, tờ Nữ Ước thời báo (New York Times), số ra ngày 1/3/2003 có nói: Thurston và một số người khác đã mô hình hoá vũ trụ như là một sự hợp nhất của nhiều đa diện khác nhau được dán bằng những cách khác nhau¹².

¹² Trong chứng minh giả thuyết Poincaré, Perelman chỉ ra rằng, bằng phương pháp đã sử dụng, có thể chứng minh giả thuyết tổng quát của Thurston.

Thurston là người rất quan tâm đến giáo dục toán học ở các trường phổ thông và đại học. Năm 1991 ông đến làm việc ở đại học California ở Berkeley, và năm 1993, trở thành Viện trưởng Viện nghiên cứu toán học ở đó. Một trong những việc làm của viện trưởng mới là thiết lập những cuộc gặp mặt thường xuyên giữa những nhà nghiên cứu và các thầy giáo phổ thông, thường là phổ thông trung học. Mục



đích của các cuộc gặp gỡ này là tìm cách cải tiến phương pháp giảng dạy toán. Ông cũng đưa vào Viện nhiều người thuộc các dân tộc thiểu số và phụ nữ. Năm 1996, vợ của Thurston vào học tại khoa Thú y của đại học UC Davis School, và Thurston theo vợ, chuyển đến khoa toán của trường đó. Ông giành rất nhiều thời gian để mở những lớp học tự do cho sinh viên, không nhất thiết là sinh viên toán. Trong các lớp học này, ông giảng cho học viên các khái niệm về không gian chiều cao một cách rất trực quan. Thurston nói rằng, những suy nghĩ về các không gian nhiều chiều có ý nghĩa to lớn trong việc nối liền toán học với thế

giới. *“Con người cần đến khả năng trực giác toán học, ...sự trực giác thường mất đi hoặc bị làm méo mó vì thầy giáo”*. Người ta kể rằng, trước buổi học, nhà toán học được giải Fields Thurston thường vào siêu thị mua rất nhiều rau và hoa quả. Với những “giáo cụ trực quan” đó, ông làm cho trực giác hình học của học sinh được nâng lên rõ rệt. Họ đã có thể nhìn thấy toán học ở khắp mọi nơi! Kết thúc bài viết mô tả về lớp học của Thurston, tờ báo hàng ngày của đại học UC Davis School, số ra ngày 28/4/2000 viết: *“Lớp học với xa lát và hoa quả đã đến lúc kết thúc; căn phòng thơm mùi cam tươi mới cắt. Thurston nhìn ra cửa sổ và nói: “Bây giờ là đầu xuân, nên vẫn còn nhiều lá chưa nở hết. Nhưng thầy khuyên các em hãy ngắm nhìn những chiếc lá, vì chúng có sự đa dạng hình học thú vị”*. Thurston mô tả một số khác biệt liên quan đến khí hậu trong hình học của lá, và dường như không có gì là dứt quãng, ông chuyển sang giải thích tại sao việc khâu các đường

cong ở tay áo lại là một bài tập về hình học. Tan lớp học, nhiều sinh viên nói rằng họ đã nhìn sự vật xung quanh với một con mắt mới, thấy hình học trong thế giới quanh họ. Và như vậy, họ đã đi vào “miền đất Thurston”.

Thurston nhận nhiều vinh dự cao quý: Ông được tài trợ của quỹ Alfred P Sloan năm 1974–1975, Giải thưởng hình học Oswald Veblen của Hội toán học Mỹ năm 1976, giải thưởng Alan T Waterman năm 1979, và là nhà toán học thứ hai sau Fefferman (Giải thưởng Fields 1978) được nhận giải thưởng này.

SHING-TUNG YAU

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1982



Shing-Tung Yau là nhà toán học gốc Trung Quốc đầu tiên được tặng Giải thưởng Fields (người thứ hai là Terence Tao, Giải thưởng Fields 2006). Ông nổi tiếng ở Trung Quốc không chỉ vì điều đó, mà vì đã đóng góp rất nhiều công sức cho sự phát triển của khoa học Trung Quốc từ sau ngày cải cách mở cửa.

Shing-Tung Yau sinh ngày 4 tháng tư năm 1949 tại Sơn Đầu, Quảng Đông, Trung Quốc, và lớn lên ở một làng thuộc Hồng Kông. Ông kể rằng, làng đó nghèo đến nỗi không có điện và nước máy, muốn tắm thì ra sông. Nhà ông có những tám anh chị em, và miếng ăn không dễ kiếm. Khi lên năm, ông thi tuyển vào một trường công lập khá tốt, nhưng bị trượt về môn toán, vì lẽ ra phải viết là 57 thì ông lại viết là 75, như cách viết ngược của chữ Hán. Và thế là ông đành theo học trường làng. Ở trường, ông bị lũ trẻ hư đe dọa và bị thầy giáo ngược đãi. Thế là Yau bỏ học nửa năm liền, rồi “mới học được cách cư xử trong những tình huống khó khăn với bạn học và thầy giáo”. Cho đến khi lên lớp sáu thì Yau đã cầm đầu một nhóm nhỏ trẻ em lang thang ngoài phố! Bố ông là một giáo sư, và vẫn dạy ông văn học cổ Trung Hoa ở nhà, mà không hề biết ông đã từng trốn học một thời gian. Trong kỳ thi tốt nghiệp tiểu học, may mắn là ông đậu vớt, không được vào học trường công, nhưng được phép vào trường tư thục. Ông theo học tại trường trung học Pui Ching. Tuy nhiên phần lớn những gì ông học được đều là học ở nhà: văn học Trung Hoa, Tiểu thuyết (Trung Hoa và phương Tây), Triết học, Lịch sử. Cuốn sách yêu thích nhất của ông là “Sử ký” của Tư Mã Thiên, cuốn sách mà đến tận ngày nay ông vẫn còn thích đọc. *“Tôi không đau khổ vì nghèo và vô danh, cũng không hài lòng vì giàu và nổi tiếng”*, một câu trong “Sử ký” đã trở thành phương châm của ông. Năm Yau tròn 14 tuổi, bố ông qua đời, và chỉ nhờ vào sự giúp đỡ của bạn bè và sinh viên của bố ông, cùng với việc làm gia sư, Yau mới có thể tiếp tục theo học trung học. Lúc này, ông đã bắt đầu ham thích học toán, và tìm cách đọc bằng được nhiều sách. Khi không có tiền mua, ông ngồi đọc luôn tại hiệu sách. Tốt nghiệp trung học, ông không thuộc loại xuất sắc, cũng không được điểm cao về môn toán. Bù lại, ông đọc được nhiều sách hơn hẳn bạn bè, nhất là về lịch sử và triết học. Yau nói rằng, điều đó giúp ích rất nhiều cho ông sau này.

Năm 1966, Yau vào học tại trường Đại học Trung Hoa của Hồng Kông. Môn toán ở đại học đã làm ông thực sự say mê, đặc biệt là phương pháp tiên đề. Ông học xuất sắc đến nỗi một thầy giáo từ Berkeley đến Hồng Kông, tiến sĩ Stephen Salaff đã mời ông cùng viết một cuốn sách về phương trình vi phân. Với sự giúp đỡ của Salaff, Yau được nhận vào học sau đại học ở Berkeley ngay khi chưa tốt nghiệp

đại học Hồng Kông. Ở Berkeley, Yau cảm thấy quá hạnh phúc vì có nhiều giáo sư giỏi, và ông đi nghe các bài giảng hàng ngày từ 8 giờ sáng đến tận 5 giờ chiều, nhiều khi phải ăn trong lớp. Ông theo học mọi thứ: tôpô, hình học, phương trình vi phân, nhóm Lie, lý thuyết số, tổ hợp, lý thuyết xác suất và hệ động lực, mặc dù nhiều khi không hiểu. Khi học về tôpô, ông thấy nó hoàn toàn khác với những gì ông đã biết trước đây. Ông cảm thấy như mình là người kém nhất lớp. Tuy nhiên sau một thời gian miệt mài học tập, ông trở nên tự tin hơn hẳn. Những cuốn sách của Milnor đã làm ông say mê, và bắt đầu suy nghĩ sâu về những điều đề cập đến trong sách. Ngay từ học kỳ thứ hai, ông đã chứng minh được một số định lý mới làm các giáo sư phải ngạc nhiên. Chern, một giáo sư hàng đầu về tôpô, đánh giá rất cao Yau, và nhận làm người hướng dẫn luận án cho ông. Chern nói rằng, những kết quả mà Yau đạt được ngay từ năm thứ nhất đã có thể đủ để viết luận án tiến sĩ. Yau hết sức ngạc nhiên, vì ông cho rằng mình mới học được quá ít. Năm thứ hai, Yau học nhiều về hình học phức và tôpô. Chern hy vọng rất nhiều ở Yau, đến nỗi ông khuyên Yau nghiên cứu giả thuyết Riemann về zeta hàm (một trong những vấn đề lớn nhất của toán học, giả thuyết mà đến nay vẫn chưa được giải quyết). Tuy nhiên, Yau nói rằng, cho đến tận ngày hôm nay, ông vẫn chưa bao giờ nghĩ về giả thuyết đó!

Thay cho giả thuyết Riemann, Yau nghiên cứu về độ cong của các không gian. Ông cho rằng, mấu chốt ở đây chính là giả thuyết Calabi về độ cong Ricci trên các đa tạp Kahler, phát biểu vào những năm 40 của thế kỷ XX. Vào thời điểm đó, hầu như không ai tin giả thuyết Calabi là đúng. Việc Yau, một nhà hình học, cố gắng tìm cách giải giả thuyết là điều đáng ngạc nhiên, vì thực chất đó là một bài toán khó của giải tích. Yau bắt đầu bằng việc tìm cách đưa các phương pháp hình học vào giải tích. Ý tưởng đầu tiên là kết hợp phương trình vi phân phi tuyến với hình học. Cùng với Cheng, Yau đã có những kết quả cơ bản về các hàm điều hoà trên đa tạp.

Yau bảo vệ luận án tiến sĩ của mình tại Berkeley năm 1971, và năm 1974, khi ông đến Stanford để nhận một ghế phó giáo sư, thì ở đó đang diễn ra một hội nghị về vật lý. Ông lập tức thấy thích thú với những vấn đề hình học trong lý thuyết tương đối. Ngay khi hội nghị đang diễn ra, Yau tưởng như đã tìm được cách để bác bỏ giả thuyết của Calabi. Ông được đề nghị báo cáo. Sau khi ông trình bày trong hội nghị, không ai lên tiếng phản đối, và mọi người cảm thấy vui mừng vì cuối cùng giả thuyết Calabi đã bị bác bỏ, đúng như người ta vẫn nghĩ. Hai tháng sau, Calabi

đề nghị Yau gửi cho mình chứng minh chi tiết. Đến lúc đó, Yau mới nhận ra một sai lầm nghiêm trọng trong chứng minh của mình. Ông nói rằng đó là thời kỳ khó khăn nhất trong cuộc đời khoa học của ông. Hàng tuần liền, ông không tài nào ngủ được, và nghĩ rằng sẽ mang tiếng xấu vì đã không viết lại được điều mình đã công bố trên hội nghị. Tuy nhiên nỗi buồn dần dần qua đi, khi càng ngày ông càng cảm thấy rằng, cần phải đi theo hướng ngược lại, nghĩa là chứng minh giả thuyết đúng! Ông nhận thức rất rõ ràng, nếu giả thuyết Calabi đúng thì sẽ có rất nhiều hệ quả thú vị. Tin vào hướng đi của mình, Yau kết hợp với nhiều người khác để chuẩn bị cho việc chứng minh giả thuyết. Ông cùng với Cheng thiết lập quan hệ của vấn đề đặt ra với phương trình Monge–Ampère, hình học affine, các mặt cực tiểu, và nhiều vấn đề khác. Richard Schoen cùng làm với ông về các ánh xạ điều hoà, Simon, Schoen cùng nghiên cứu về các mặt cực tiểu. Trong hai năm, ông hiểu biết thêm rất nhiều về mối liên hệ giữa giải tích phi tuyến và hình học. Yau nói rằng, đó là thời kỳ tuyệt vời trong sự phát triển của hình học. Ngay sau khi cưới vợ, năm 1976, ông chứng minh được trọn vẹn giả thuyết Calabi, và cảm thấy rằng, cuối cùng đã hiểu được độ cong trên các đa tạp Kahler. Liền sau đó, có rất nhiều kết quả sâu sắc của hình học đại số được tìm thấy như một hệ quả của giả thuyết. Khi chứng minh xong giả thuyết Calabi, Yau cảm thấy đã tạo được một công cụ để các nhà toán học kết hợp hai lĩnh vực quan trọng với nhau: phương trình đạo hàm riêng phi tuyến và hình học. Cùng với công trình của Yau, xuất hiện không gian Calabi–Yau trong lý thuyết dây, trong đó đưa ra một mô hình hình học của vũ trụ, lập nên từ một không gian 10 chiều có dạng $M \times V$, trong đó M là không gian 4 chiều (không–thời gian), còn V là không gian Calabi–Yau compact 6 chiều. Do không gian V là compact nên có thể xem như nó là vô cùng nhỏ so với M . Như vậy, nếu quả thật vũ trụ được mô tả bởi 10 chiều, thì không gian 4 chiều mà ta đang sống (ba chiều không gian, một chiều thời gian) là chủ yếu, 6 chiều kia được thu lại rất nhỏ. Về kết quả của Yau, tờ báo hàng ngày “New York Times”, số ra ngày 2 tháng 9 năm 2003 nhắc lại : *“Có một vấn đề là lý thuyết dây đòi hỏi 10 chiều của không–thời gian, trong khi chúng ta sống trong một thế giới 4 chiều. Tiến sĩ Strominger nhắc lại là ông đã rất kinh ngạc khi tìm thấy bài báo của nhà toán học Shing–Tung Yau chứng minh giả thuyết của Calabi nói rằng, các chiều thừa ra có thể cuộn lại thành một khối vô cùng nhỏ, tựa như cái kính lúp trong tám tấm”*.

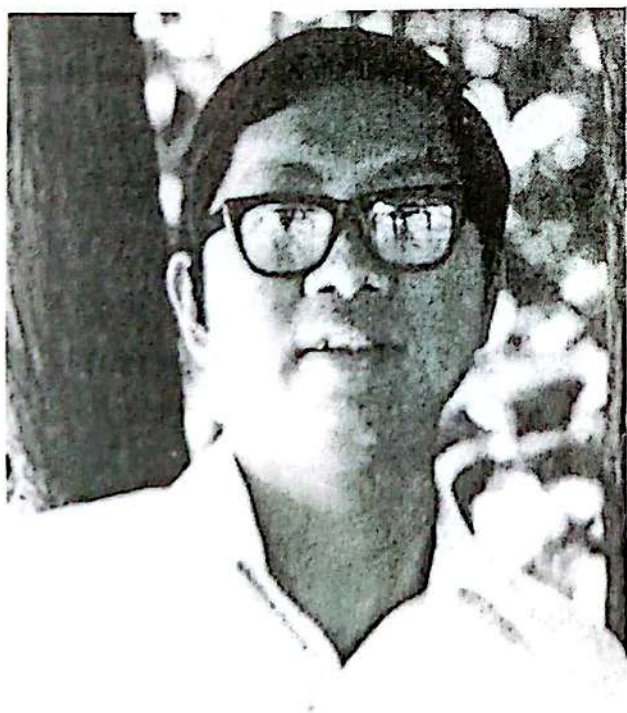
Năm sau, Yau đến thăm đại học Berkeley, làm các xêmina về các vấn đề phi tuyến trong hình học. Ở đó có cả Schoen và Cheng, và cùng với họ, ông giải quyết được

một vấn đề rất quan trọng trong lý thuyết tương đối, là “giả thuyết khối lượng dương” (chỉ khi khối lượng dương thì không-thời gian mới ổn định).

Năm 1978, Yau trở về Stanford, và cùng với Yung-Tung Siu, áp dụng các mặt cực tiểu để giải giả thuyết Frenkel, một ẩn đề nổi tiếng trong hình học phức. Đặc biệt, ông đưa ra ý tưởng dùng ánh xạ điều hoà để nghiên cứu các nhóm đối xứng rời rạc. Yau và Schoen đã phát triển lý thuyết cấu trúc của các đa tạp với độ cong dương, dựa trên các công trình của họ về lý thuyết tương đối.

Yau được tặng Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học thế giới 1982 (họp năm 1983 ở Warsaw, bị hoãn do tình hình Ba Lan thời kỳ đó). Yau nói rằng, ông làm toán không phải vì để được nhận giải thưởng hay được tôn vinh, mà vì *“thật tuyệt vời khi thấy trí tuệ con người có thể đạt đến mức hiểu được tự nhiên. Vẻ đẹp của tự nhiên xét từ quan điểm hình học là vẻ đẹp vĩnh hằng”*.

Trong khoảng 10 năm gần đây, Yau cùng với những cộng sự của mình tập trung nghiên cứu vai trò của vật lý cơ bản trong hình học. Ông cho rằng tư tưởng quan trọng bậc nhất chính là đối ngẫu, mà nói gọn lại là, một lý thuyết nào đó với một liên kết mạnh cũng hoàn toàn giống như một lý thuyết khác với liên kết yếu. Theo Yau, điều này đã được nói trong Lão Tử, nhưng quan điểm về đối ngẫu chặt chẽ và mang tính định lượng hơn.



Ngoài Giải thưởng Fields, Yau còn nhận được nhiều giải thưởng cao quý khác: Giải thưởng Veblen (1981), Giải thưởng Carty của Viện hàn lâm Mỹ (1981), Giải thưởng Crafoord của Viện hàn lâm hoàng gia Thụy Điển (1994), Giải thưởng khoa học quốc gia Mỹ (1997). Shing-Tung Yau được tặng bằng Tiến sĩ danh sự của nhiều trường đại học: Đại học bách khoa ở Brooklin, New York; Đại học Trung Hoa của Hồng Kông, Đại học Chao Tung (Đài Loan), Đại học Thanh Hoa ở Đài Loan; Đại học Macau; Đại học Triết Giang (Trung Quốc). Ông là giáo sư đại học

Harvard, đồng thời là giáo sư đại học Trung Hoa của Hồng Kông; giáo sư danh dự Đại học Bắc Kinh; Đại học Triết Giang; Đại học Hàng Châu; Đại học Thanh Hoa

ở Đài Loan, và nhiều đại học khác. Yau cũng là viện sĩ của nhiều Viện hàn lâm: Viện hàn lâm khoa học và nghệ thuật Mỹ (1982); Viện hàn lâm Trung Hoa (Đài Loan); Viện hàn lâm quốc gia Mỹ (1993); Viện hàn lâm Trung Quốc (1995), Viện hàn lâm Nga (2003).

Sau thời kỳ Trung Quốc thực hiện chính sách “mở cửa”, Yau đã làm rất nhiều việc để thúc đẩy sự phát triển khoa học, đặc biệt là toán học ở Trung Quốc. Kể từ năm 1979, ông giúp đỡ nhiều sinh viên Trung Quốc sang học ở Mỹ, hướng dẫn họ nghiên cứu, tổ chức nhiều hoạt động khoa học tại Trung Quốc. Đặc biệt, ông đã lập Viện Toán học tại Đại học Trung Hoa ở Hồng Kông năm 1994, Trung tâm toán học “Morning side” tại Viện hàn lâm khoa học Trung Quốc, nơi tập trung nhiều tài năng trẻ của Trung Quốc, với một sự đầu tư rất lớn. Ông cũng sáng lập Trung tâm toán học tại Đại học Triết Giang năm 2002. Yau còn đóng góp nhiều ý kiến rất thẳng thắn về chính sách khoa học của Trung Quốc. Trả lời phỏng vấn của Tân Hoa Xã ngày 17 tháng 8 năm 2005, ông nói rằng, nếu Trung Quốc không chấm dứt ngay được nạn “tham nhũng bằng cấp” thì sự phát triển của khoa học và công nghệ đất nước có thể bị chậm lại 20 năm. Tình trạng chạy theo số lượng, giảm hẳn chất lượng đã trở nên báo động. Hệ thống đánh giá ở Trung Quốc lại quá lạc hậu: Người ta chỉ đếm xem một “nhà khoa học” viết được bao nhiêu cuốn sách, đăng được bao nhiêu bài, mà ít để ý đến chất lượng của chúng. Tình trạng ăn cắp kết quả cũng là một căn bệnh kinh niên của khoa học Trung Quốc. Yau cũng thừa nhận rằng, năm 2004, Bộ Giáo dục Trung Quốc đã đưa ra một số tiêu chuẩn về việc công bố công trình, nhưng hiệu quả của chính sách đó thế nào thì còn phải chờ thực tế.

Ngày 20 tháng 4 năm 2004, Ban chấp hành Trung ương Đảng Cộng sản Trung Quốc, Hội đồng Nhà nước nước CHNDTH ra quyết định tặng Shing-Tung Yau Giải thưởng hợp tác khoa học công nghệ Trung Quốc 2003, để ghi nhận những gì ông đã làm cho đất nước Trung Quốc.

SIMON KIRWAN DONALDSON

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1986



Cũng như trong sinh học hay hoá học, bài toán phân loại là bài toán quan trọng của toán học. Chỉ có điều các nhà toán học “may mắn” hơn các nhà sinh học: Đôi khi họ có thể nói chắc rằng, họ đã *phân loại hết* một lớp đối tượng nào đó, điều không thể có trong sinh học. Các nhà toán học của thế kỷ 19 đã hoàn tất việc phân loại các đa tạp hai chiều: Một đa tạp được xếp vào lớp nào đó tùy thuộc số “lỗ” mà nó có. Chẳng hạn mặt cầu không có lỗ nào, mặt của cái nhẫn có chứa một lỗ ở khoảng giữa,... Các mặt có cùng số lỗ là hoàn toàn như nhau, xét về mặt tô pô. Vấn đề trở nên phức tạp hơn hẳn khi người ta cố gắng phân loại các đa tạp chiều cao hơn 2, đặc biệt các đa tạp 3 chiều (như không gian vật lý mà ta đang sống), hoặc 4 chiều (không-thời gian). Simon Donaldson chính là một trong những người đặt nền tảng cho việc giải quyết bài toán đó.

Simon Donaldson sinh ngày 20 tháng 8 năm 1957 ở Cambridge, nước Anh. Sau khi tốt nghiệp trường trung học Sevenoaks ở Kent, ông vào học ở Pembroke College, Cambridge, và nhận bằng cử nhân của trường năm 1979. Các thầy giáo nói rằng, ông là học sinh xuất sắc, tuy nhiên chưa phải là người giỏi nhất khoá học. Ông thường đến lớp với bao đựng đàn vĩ cầm trên vai.

Năm 1980 Donaldson vào học nghiên cứu sinh của Worcester College ở Oxford, ban đầu thi dưới sự hướng dẫn của Nigel Hitchin, về sau chuyển sang học với Atiyah (Giải thưởng Fields năm 1966). Hitchin đề nghị Donaldson nghiên cứu điều kiện về một sự ổn định đại số-hình học cần thiết để một phân thớ chính hình thừa nhận một liên thông Yang-Mills. Ban đầu Donaldson dự định dùng các phương pháp tiếp cận giải tích, được khích lệ bởi công trình của Shing-Tung Yau về chứng minh giả thuyết Calabi. Nhưng rồi ông chuyển sang một cách tiếp cận hoàn toàn mới: dùng lý thuyết “gauge”, một công cụ hiện đại của vật lý lý thuyết. Phát hiện bất ngờ nhất của Donaldson là chỉ ra sự tồn tại các không gian 4 chiều có nhiều cấu trúc vi phân khác nhau. Ta nhớ lại rằng, năm 1957, Milnor đã chứng minh sự tồn tại các cấu trúc vi phân khác nhau trên mặt cầu 7 chiều, kết quả đã mang lại cho ông Giải thưởng Fields. Atiyah nhận xét về người học trò của mình như sau: “*Năm 1982, khi mới là nghiên cứu sinh năm thứ hai, Simon Donaldson đã chứng minh một kết quả làm sững sốt giới toán học*”. Kết quả đó được Donaldson công bố trong bài “*Liên thông tự đối ngẫu và tô pô các đa tạp trơn 4 chiều*”, đăng trong tạp chí Tin tức hội toán học Mỹ năm 1983. Atiyah nhấn mạnh: “*Cùng với công trình quan trọng của Michael Freedman, kết quả của Donaldson suy ra rằng tồn tại các không gian 4 chiều “exotic”, tức là các đa tạp khả vi 4*

chiều tương đương tôpô nhưng không tương đương khả vi với không gian Euclid 4 chiều tiêu chuẩn $\mathbb{R}^4$. Kết quả này thực sự gây ngạc nhiên vì $n = 4$ là giá trị duy nhất mà đối với nó các không gian exotic n chiều tồn tại. Các không gian exotic 4 chiều này có tính chất thú vị (khác với $\mathbb{R}^4$) là chúng chứa các tập compact mà không thể được chứa bên trong bất kỳ một mặt cầu nhúng khả vi 3 chiều nào!” Có thể thấy đây là một kết quả mà trực giác hình học bình thường không thể hình dung được: Một tập compact (tức sẽ là “rất bé” trong không gian) mà lại không thể có mặt cầu nào chứa được nó ở trong, như thể hòn đá không được chứa trong bất kỳ quả bóng dù to đến mức nào!

Không gì có thể nói rõ hơn đóng góp của Donaldson bằng những lời của Atiyah giới thiệu công trình của Donaldson tại Đại hội 1986 : “*Khi Donaldson hoàn thành một ít kết quả đầu tiên về đa tạp 4 chiều, các ý tưởng quá mới và kỳ lạ đối với các nhà hình học và tôpô, đến nỗi họ chỉ có thể ngắm nhìn với sự thán phục ngơ ngác. Dần dần các thông điệp đã được thấu hiểu, và bây giờ các ý tưởng của Donaldson bắt đầu được những người khác áp dụng theo rất nhiều cách khác nhau. Donaldson đã mở ra một lĩnh vực hoàn toàn mới; phát hiện ra những hiện tượng bất ngờ và bí hiểm về hình học 4 chiều. Hơn nữa, các phương pháp là mới và hết sức tinh tế, sử dụng những phương trình vi phân đạo hàm riêng phi tuyến khó nhất. Mặt khác, lý thuyết này nằm trong những dòng chảy chính của toán học, có mối quan hệ mật thiết với quá khứ, kết hợp chặt chẽ các tư tưởng của vật lý lý thuyết và sức mạnh đẹp đẽ của hình học đại số*”.

Nhân dịp Donaldson nhận Giải thưởng Crafoord, R. Stern và Gang Tian đã viết khi giới thiệu các công trình của ông: “*Năm 1982 Simon Donaldson bắt đầu một hành trình hình học phong phú, dẫn chúng ta đến một kết cục tuyệt vời của thế kỷ này. Ông đã sáng tạo ra một lĩnh vực kỳ diệu và hoàn toàn mới mà nhiều ngành toán học sẽ đi qua đó, và tiếp tục phát hiện những hiện tượng bất ngờ và bí hiểm về tôpô và hình học các đa tạp trơn 4 chiều*”.

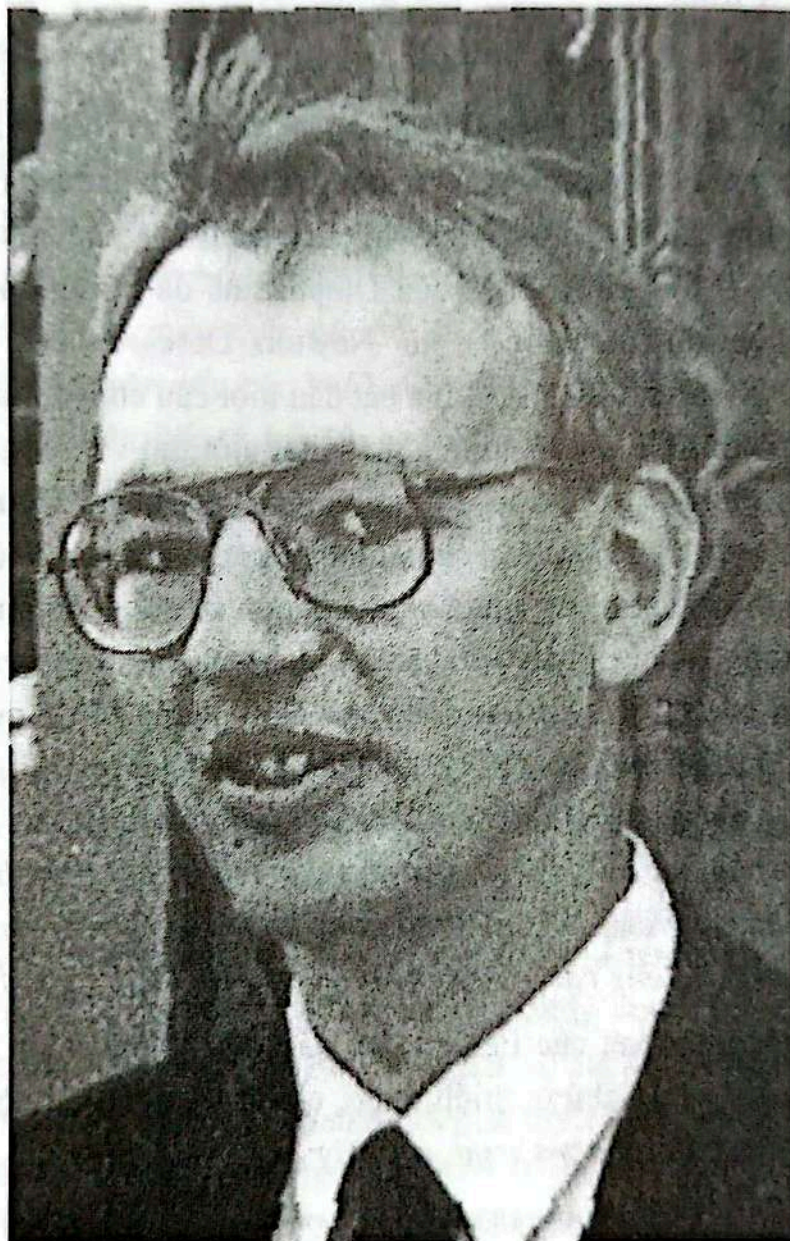
Các cấu trúc của Donaldson, dựa trên phương trình Yang–Mills bí hiểm và lý thuyết Gauge, mặc dù đưa lại những kết quả kỳ diệu, nhưng vẫn rất khó tính toán. Về sau, hai nhà vật lý là Seiberg và Witten đã đưa ra phương trình đơn giản hơn, ngày nay nổi tiếng dưới tên gọi phương trình Seiberg–Witten, để tính toán các cấu trúc của Donaldson. Chính nhờ kết quả đó mà Witten đã nhận Giải thưởng Fields năm 1990.

Sau khi nhận bằng tiến sĩ tại Oxford năm 1983, Donaldson làm việc một năm tại Viện nghiên cứu cao cấp Princeton, rồi trở về Oxford giữ chức giáo sư toán học cho đến tận bây giờ.

Donaldson nhận được nhiều giải thưởng và vinh dự cao quý: Giải thưởng trẻ Whitehead của Hội toán học London năm 1985; được bầu vào Viện Hoàng gia Anh năm 1986; Giải thưởng Fields năm 1986; Giải thưởng William Hopkins của Hội triết học Cambridge năm 1991; Huy chương Hoàng gia năm 1992; Giải thưởng Crafoord của Viện hàn lâm khoa học hoàng gia Thụy Điển năm 1994; được bầu vào Viện hàn lâm khoa học Pháp tháng 5 năm 2005, và nhận Giải thưởng King Faisal năm 2006.

GERD FALTINGS

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1986



Andrew Wiles, chứ không phải là Faltings đã chứng minh được “định lý cuối cùng” của Fermat. Thế nhưng nhắc đến định lý Fermat, không thể nào không nhắc đến Faltings. Cũng như vậy, viết về Faltings, nhất định phải nói về định lý Fermat.

Lịch sử của định lý Fermat có thể tính từ thời cổ Hy Lạp, bắt đầu bằng định lý Pythagore nổi tiếng. Các “bộ số Pythagore” là các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thoả mãn phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (1)$$

Những người Hy Lạp đã biết cách tìm tất cả các bộ ba số thoả mãn phương trình trên, và như vậy, họ đã biết cách giải “phương trình Diophantus” (1). Diophantus là nhà toán học lớn của Hy Lạp cổ đại, với cuốn sách “Số học” được dịch ra tiếng latin vào thế kỷ 17. Cuốn “Số học” của Diophantus đã là nguồn cảm hứng cho nhiều nhà toán học lớn của châu Âu, từ Newton, Descartes đến Fermat. Và khi cuốn sách đến tay Fermat thì cũng là lúc bắt đầu một câu chuyện dài của toán học. Là quan toà ở Toulouse, Fermat chỉ làm toán như một thú vui, ông không công bố các kết quả của mình, mà chỉ trao đổi với bạn bè qua thư từ. Khi đọc cuốn “Số học”, ông thường ghi chú bên lề sách các nhận xét của mình. Đó thường là các định lý hoặc giả thuyết. Khi ông qua đời, người con của ông, Samuel, công bố các nhận xét đó. Trong những nhận xét bên lề sách của Fermat, bên cạnh định lý Pythagore, người ta tìm thấy những dòng sau đây, những dòng ngắn ngủi đã trở thành lời thách đố trong suốt ba thế kỷ của toán học: *“Không thể viết một lũy thừa bậc ba dưới dạng tổng hai lũy thừa bậc ba, một lũy thừa bậc bốn dưới dạng tổng hai lũy thừa bậc bốn, và nói chung, một số tùy ý mà là lũy thừa bậc lớn hơn hai không thể viết như tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi có một chứng minh tuyệt vời cho mệnh đề này, nhưng cái lề sách này quá nhỏ để có thể ghi được”*.

Khi mà tất cả các nhận xét của Fermat đều đã được chứng minh, thì chỉ còn lại “Định lý cuối cùng” chưa chứng minh được, chính là mệnh đề nêu trên, mà nếu phát biểu ngắn gọn sẽ là: *Phương trình sau đây*

$$x^n + y^n = z^n \quad (2)$$

không có nghiệm nguyên khi $n > 2$.

Những nhà toán học lớn nhất đều đã từng cố gắng chứng minh định lý cuối cùng của Fermat. Ernst Eduard Kummer, nhà toán học Đức thế kỷ 19, người đã sáng tạo nên nhiều lý thuyết quan trọng của đại số trong quá trình cố gắng chứng minh định lý Fermat, có lần nói rằng, “Định lý cuối cùng của Fermat giống với một trò

đầu hơn là một đỉnh cao của khoa học". Định lý Fermat hấp dẫn các nhà toán học vì nó chỉ nói về một phương trình đơn giản, nhưng lại đưa đến sự khảo sát tổng quát các phương trình. Và chính vì phát biểu đơn giản của nó mà không ít nhà toán học "nghiep dư" cũng nuôi hy vọng tìm thấy chứng minh bị thất truyền của Fermat. Hầu như năm nào cũng có ai đó công bố chứng minh định lý Fermat, và rồi lại có người tìm ra cái sai trong chứng minh đó.

Nhiều cách tiếp cận đến định lý Fermat đã được đưa ra, nhiều lý thuyết mới của toán học cũng nảy sinh từ đó. Định lý Fermat đã trở thành con gà đẻ trứng vàng của toán học trong suốt ba thế kỷ.

Cho đến cuối thập kỷ 70 của thế kỷ trước, cho dù với nhiều nỗ lực của nhiều thế hệ toán học, người ta chỉ chứng minh được định lý Fermat trong những trường hợp riêng. Kết hợp với máy tính, có thể đi đến kết luận rằng, phương trình (2) không có nghiệm nguyên nếu bậc lớn hơn 2 và nhỏ hơn bốn triệu. Nhưng đối với toán học, con số bốn triệu, bốn tỷ, hay lớn hơn nữa, vẫn khác về chất so với "mọi n ".

Năm 1983, Faltings đã làm một cuộc cách mạng thực sự, khi sử dụng những công cụ của hình học đại số để chứng minh được rằng, phương trình Fermat cùng lắm chỉ có hữu hạn nghiệm. Dĩ nhiên, từ chỗ "hữu hạn" đến "không có gì" vẫn còn là một khoảng cách lớn, nhưng nó cho một câu trả lời tổng quát cho mọi n , điều mà những thế hệ trước đây chưa làm được. Faltings không xét phương trình Fermat như một đối tượng độc lập, mà ông xét vấn đề tồn tại các điểm tọa độ hữu tỷ trên đường cong đại số. Nếu ta xem mỗi nghiệm (x, y, z) của phương trình

$$P(x, y, z) = 0,$$

trong đó P là một đa thức thuần nhất, xác định một điểm của không gian xạ ảnh 2 chiều, thì tập hợp các nghiệm lập thành một đường cong. Như vậy, số nghiệm nguyên của phương trình $P(x, y, z) = 0$ đúng là số các điểm trên đường cong mà tọa độ là các số hữu tỷ, và bài toán giải phương trình Diophantus được đưa về bài toán tìm các điểm hữu tỷ trên đường cong. Với phương pháp đó, các bài "toán đố" của số học mà trước đây được giải một cách thủ công và tài tình, ngày nay có thể là những hệ quả của những kết quả sâu sắc trong hình học đại số. Thông thường, chỉ khi một giả thuyết về một sự kiện cụ thể nào đó được đưa vào trong một cấu trúc chung của toán học, các nhà toán học mới thực sự tin là giả thuyết đó đúng. Bài toán Fermat cũng không là một ngoại lệ: Sau công trình của Faltings, người ta tin là định lý cuối cùng của Fermat rồi sẽ được chứng minh.

Faltings đi đến kết quả tổng quát về định lý Fermat bằng cách chứng minh một giả thuyết nổi tiếng trong hình học đại số: *Giả thuyết Mordell–Shafarevich–Tate*. Đó là một giả thuyết rất sâu sắc, nói về sự hữu hạn sinh của nhóm Shafarevich–Tate, mà việc phát biểu nó đòi hỏi nhiều kiến thức chuyên sâu của hình học đại số. Tuy nhiên, từ một hệ quả của nó (giả thuyết Mordell) suy ra rằng, các đường cong với *giống* lớn hơn 1 chỉ chứa hữu hạn điểm hữu tỷ¹³. Đối với một đường cong xạ ảnh không kỳ dị có bậc n , giống của nó được tính đơn giản bằng công thức $(n-1)(n-2)/2$.

Đường cong xác định bởi phương trình Fermat không có kỳ dị, và với $n > 3$, giống của nó (theo công thức trên) lớn hơn 1, nên phương trình Fermat trong trường hợp đó chỉ có thể có hữu hạn nghiệm (trường hợp phương trình với $n=3$ đã được chứng minh từ thời Fermat). Với việc chứng minh giả thuyết Mordell–Shafarevich–Tate và từ đó suy ra kết quả tuyệt vời về định lý Fermat, Faltings nhận được Giải thưởng Fields năm 1986.

Niềm tin của các nhà toán học, sau công trình của Faltings, rằng định lý lớn Fermat sẽ được chứng minh đã nhanh chóng trở thành sự thật: Andrew Wiles kết thúc chặng đường tìm kiếm trong ba trăm năm của toán học vào năm 1993. Cũng cần nhắc lại rằng, “giả như” trong chứng minh đầu tiên mà Wiles công bố năm 1993 mà không mắc một lỗi hổng, thì chắc chắn Wiles đã được nhận Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học quốc tế năm 1994. Tiếc rằng, lỗi hổng đó (có thể nói là rất nhỏ so với chứng minh đồ sộ của ông), lại chỉ được khắc phục sau khi Đại hội 1994 đã họp, mà tại đại hội 1998 thì Wiles đã 41 tuổi, quá một tuổi để có thể nhận Giải thưởng Fields! Thế là một trong những bài toán lớn nhất của toán học lại không có cơ hội trao giải thưởng cao nhất của toán học cho người giải được nó!

Gerd Faltings nhận bằng tiến sĩ tại đại học Munster năm 1978 với một đề tài trong đại số giao hoán “*Về Macaulay hóa*”, dưới sự hướng dẫn của Nastold. Sau khi bảo vệ luận văn tiến sĩ, ông nhận học bổng sau tiến sĩ để làm việc tại đại học Harvard, Mỹ. Lúc này ông đã chuyển sang nghiên cứu những vấn đề rộng hơn của hình học đại số, mà không chỉ trong đại số giao hoán. Trở về Đức, ông được phong giáo sư tại đại học Wuppertal năm 1979. Sau khi hoàn thành công trình nổi tiếng về chứng minh giả thuyết Mordell–Shafarevich–Tate, năm 1985 Faltings chuyển sang làm giáo sư tại đại học Princeton, Mỹ. Vào thời đó, việc Faltings chuyển đi

¹³ Trong cuốn sách này, chúng ta đã nhiều lần gặp khái niệm “giống” của một đường cong. Để hiểu về khái niệm này, có thể xem trong các sách về hình học đại số.

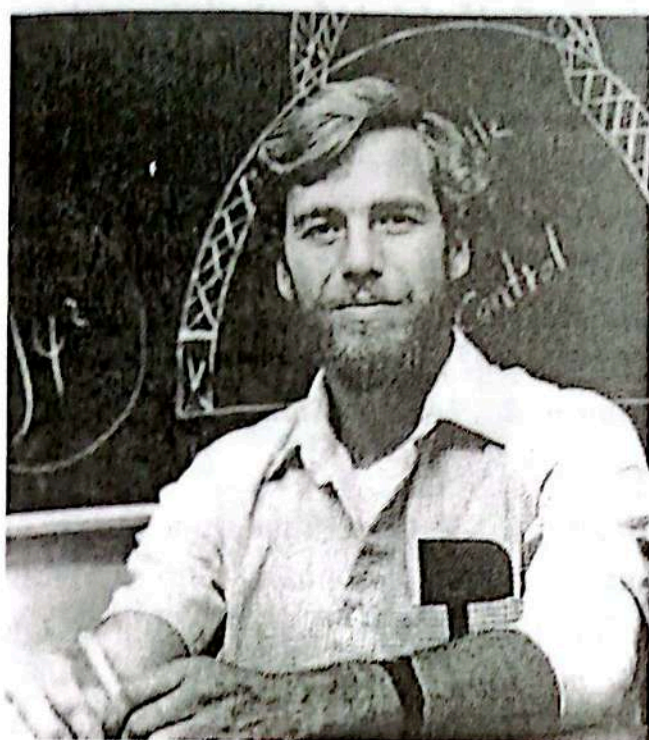
đã gây xôn xao dư luận Đức. Ông nói rằng, với việc rời nước Đức, ông muốn thể hiện ý kiến của mình với chính phủ mà theo ông là chưa tạo điều kiện thực sự tốt cho các nhà khoa học.

Nhưng cuối cùng thì Faltings cũng trở về Đức, và hiện nay ông đang là một trong ba Viện trưởng (luân phiên) của Viện toán học Max-Planck ở Bonn. Khó mà phân biệt con người nổi tiếng đó với mọi người chung quanh: Ông luôn ăn mặc theo kiểu “đủ tổng quát” đối với một nhà toán học: chiếc áo len có vẻ xộc xệch, hoặc một cái áo khoác gợi nhớ thời sơ tán ở Việt Nam! Nhưng khi vào xêmina thì rất dễ nhận ra ông: đó là người luôn đưa ra những nhận xét, những câu hỏi sắc sảo làm cho báo cáo viên vừa thấy may mắn, vừa thấy ngại ngùng!

MICHAEL HARTLEY FREEDMAN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1986





Michael Freedman được tặng Giải thưởng Fields nhờ chứng minh giả thuyết Poincaré trong trường hợp 4 chiều. Ta biết rằng, các đa tạp compact hai chiều được đặc trưng bởi nhóm cơ bản của chúng. Đặc biệt, khi một đa tạp 2 chiều tùy ý tương đương đồng luân với mặt cầu 2 chiều, thì nó đồng phôi với mặt cầu (có thể hiểu một cách nôm na, hai đa tạp tương đương đồng luân nếu ta có thể biến thiên liên tục một đa tạp để nhận được đa tạp kia). Giả thuyết Poincaré nổi tiếng nói rằng, điều đó cũng đúng cho các đa tạp 3 chiều và mặt cầu ba chiều. Ban đầu, Poincaré giả thuyết rằng một đa tạp 3 chiều compact

với cùng các nhóm *đồng điều* (chứ không cần phải là nhóm đồng luân) như mặt cầu 3 chiều sẽ là mặt cầu 3 chiều, nhưng tự ông tìm ra một phản ví dụ, và ông đổi thành giả thuyết nói rằng, đa tạp 3 chiều compact với nhóm cơ bản triệt tiêu là mặt cầu 3 chiều. Giả thuyết Poincaré trở thành một trong những bài toán khó nhất của toán học thế kỷ 20 (Viện toán học Clay đã treo giải thưởng một triệu đô la Mỹ cho người nào giải được giả thuyết đó). Rất gần đây, nhà toán học người Nga Perelman công bố chứng minh giả thuyết Poincaré, và nhờ đó, ông được trao Giải thưởng Fields năm 2006. Trên con đường cố gắng chứng minh giả thuyết Poincaré, các nhà toán học đã sáng tạo nên nhiều công cụ và lý thuyết mới, và đã thu được những thành tựu nổi bật. Cũng giống như trong nhiều bài toán khác, khi chưa giải quyết được trường hợp 3 chiều, người ta thử xét những chiều cao hơn! Từ đó ra đời *giả thuyết Poincaré chiều cao* nói rằng *một đa tạp n chiều đóng tùy ý tương đương đồng luân với mặt cầu n chiều phải là mặt cầu n chiều*. Khi $n = 3$, điều này tương đương với giả thuyết Poincaré. Năm 1961, Smale chứng minh giả thuyết Poincaré với n ít nhất bằng 5. Với thành tựu đó, Smale nhận được giải thưởng Fields năm 1966. Trường hợp 4 chiều được Freedman chứng minh trong công trình dài gần 100 trang "*Tôpô các đa tạp 4 chiều*" đăng trong tạp chí *Hình học vi phân* (J. Diff. Geometry) năm 1982, và cũng đã mang về cho ông Giải thưởng Fields.

Tại Đại hội toán học năm 1986 ở Berkeley, khi trình bày về các kết quả của Freedman, Milnor nói: "*Michael Freedman không chỉ chứng minh giả thuyết Poincaré cho các đa tạp tôpô 4 chiều, và như vậy đặc trưng hoá mặt cầu S^4 , mà*

ông còn cho chúng ta các định lý về phân loại, rất dễ phát biểu và sử dụng nhưng rất khó chứng minh, đối với các đa tạp 4 chiều tổng quát nhất. Bản chất đơn giản của các kết quả của ông trong trường hợp tôpô tương phản với sự phức tạp đặc biệt mà ngày nay được biết là xuất hiện khi nghiên cứu các đa tạp 4 chiều khả vi và tuyến tính từng mẫu... Chứng minh của Freedman năm 1982 cho giả thuyết Poincaré 4 chiều là một cuộc vượt chướng ngại vật kỳ diệu. Phương pháp của ông đã tiến hết sức gần đến việc cho trên thực tế một sự phân loại đầy đủ các đa tạp tôpô 4 chiều đơn liên compact, đưa đến nhiều ví dụ về những đa tạp như vậy chưa được biết đến trước đây, và nhiều phép đồng phôi chưa biết giữa những đa tạp đã biết”.

Tạp chí *Notices* của Hội toán học Mỹ, khi đưa tin về việc Freedman được trao Giải thưởng Veblen năm 1986 đã viết: “Sau những phát minh của những năm đầu thập kỷ 60 về chứng minh giả thuyết Poincaré và các tính chất khác của đa tạp đơn liên chiều lớn hơn 4, một trong những vấn đề mở lớn nhất, bên cạnh giả thuyết Poincaré 3 chiều, là vấn đề phân loại các đa tạp đóng đơn liên 4 chiều. Trong bài báo *Tôpô của các đa tạp 4 chiều* công bố trên tạp chí *Hình học vi phân* năm 1982, Freedman đã giải quyết vấn đề đó, và đặc biệt, chứng minh giả thuyết Poincaré 4 chiều. Điểm mới nhất ở đây là lời giải vấn đề giải phẫu đơn liên bằng cách chứng minh điều kiện đồng luân lý thuyết, được gợi ý bởi Casson cho các “tay” 2 chiều, tức là các đĩa mỏng trong đa tạp 4 chiều có biên”. Thuật ngữ “giải phẫu” mà Freedman dùng để chỉ phương pháp chứng minh đã nói lên một cách trực quan thực chất của phương pháp đó: Để “biến” một đa tạp 4 chiều thành mặt cầu 4 chiều, ta chấp thêm vào cho nó các “tay”. Phương pháp này được dùng lần đầu tiên bởi Casson, tuy nhiên Freedman phải khắc phục những khó khăn đặc biệt mà khi số chiều lớn hơn 4 thì không xuất hiện. Milnor nhận xét rằng “chứng minh đã dùng một lý luận lặp lại vô hạn có kiểm soát rất tinh tế trong tinh thần của trường phái tôpô của Bing”. Nói chung, việc dùng một quá trình vô hạn là điều thường thấy trong giải tích, nhưng lại rất khó khăn trong hình học.

Bên cạnh những kết quả đó về đa tạp 4 chiều đơn liên đóng, Freedman còn chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc về tôpô các đa tạp 4 chiều, chẳng hạn, tồn tại đa tạp đóng 4 chiều không trơn; tồn tại các đa tạp 4 chiều với những cách tam giác phân không tương đương (câu trả lời phủ định cho giả thuyết Hauptvermutung 4 chiều).

Michael Freedman sinh ngày 21 tháng 4 năm 1951 ở Los Angeles, Mỹ. Ông vào học tại đại học California ở Berkeley năm 1968, rồi năm sau chuyển đến Princeton. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ tại Princeton năm 1972 dưới sự hướng dẫn

của William Browder, một nhà tô pô nổi tiếng. Luận án của ông mang tên “Giải phẫu đối chiều hai”.



Sau khi bảo vệ luận án, Freedman làm giảng viên tại khoa Toán đại học California ở Berkeley từ 1973 đến 1975, rồi làm việc tại Viện nghiên cứu cao cấp Princeton một năm. Năm 1976 ông về làm giảng viên tại đại học California ở San Diego, và giữ chức phó giáo sư tại đó năm 1979. Trong năm học 1980–1981 ông lại được mời làm việc tại Princeton, rồi trở về nhận ghế giáo sư tại đại học California ở San Diego năm 1982.

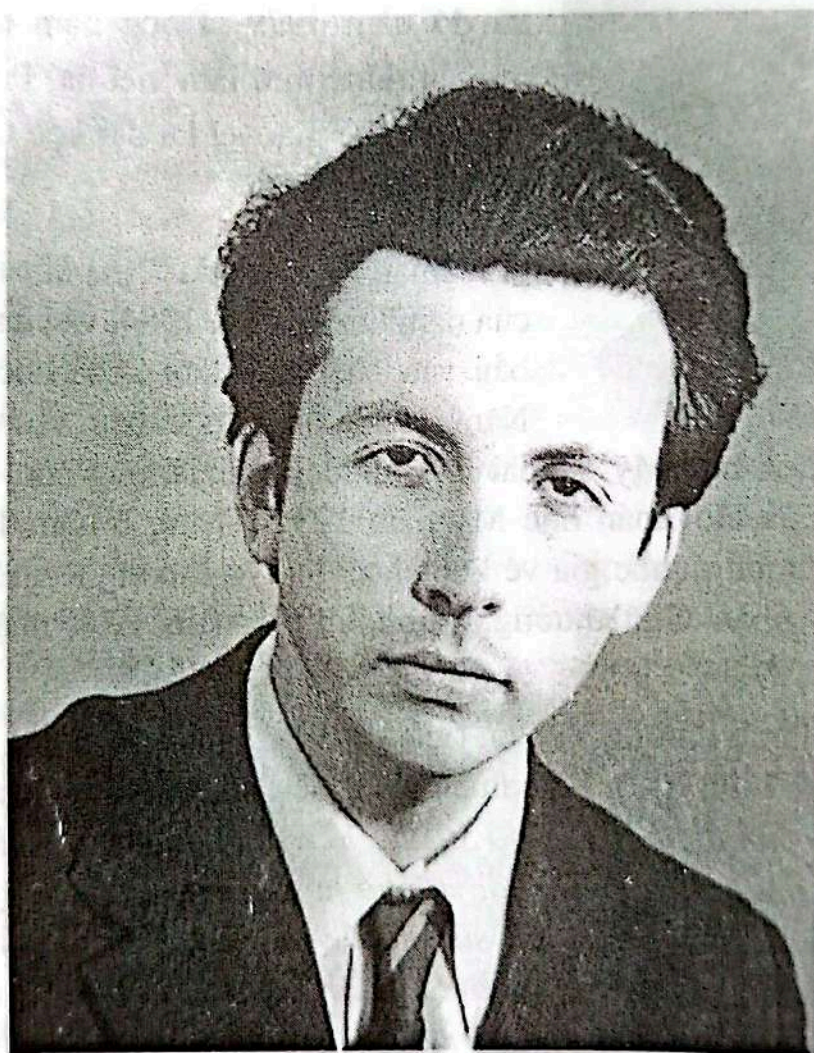
Freedman được bầu là “Nhà khoa học California của năm” trong năm 1984, và cùng năm đó được bầu vào Viện hàn lâm khoa học quốc gia Mỹ. Năm 1985, ông được bầu vào Viện hàn lâm

nghệ thuật và khoa học Mỹ. Ngoài Giải thưởng Fields, ông còn được tặng Giải thưởng Veblen của Hội toán học Mỹ năm 1986. Tháng 6 năm 1987 Freedman được tặng Huy chương quốc gia về khoa học do Tổng thống Ronald Reagan trao. Năm 1988, ông nhận Giải thưởng Humboldt, và năm 1994 nhận Giải thưởng Guggenheim.

Trong buổi nhận giải thưởng Veblen (giải thưởng giành cho những cống hiến xuất sắc trong lĩnh vực hình học), Freedman phát biểu đôi lời về hình học: *“Trong thế kỷ 19 đã từng có thời điểm, trong đó Steiner là một nhân tố chính, khi mà người ta cố giữ hình học thuần túy, tách khỏi sự phá hoại của đại số. Ngày nay, theo tôi, chúng ta cảm thấy rằng phần lớn sức mạnh của toán học đến từ việc kết hợp những lĩnh vực tưởng chừng rất xa nhau. Toán học không phải là một bộ sưu tập những chủ đề khác nhau như một số người nghĩ. Điều này cũng đúng với bất kỳ lĩnh vực nào của nhận thức”. Ông cũng cho rằng các nhà toán học phải tham gia vào các hạt động khác của xã hội: “Tôi muốn ngợi ca cố gắng hiện nay của nhiều nhà toán học nhằm phát biểu các ý tưởng về giáo dục, năng lượng, kinh tế, quốc phòng, và hoà bình thế giới. Kinh nghiệm nội tại của toán học chỉ ra rằng, không nhất thiết chỉ những bàn tay quen thuộc mới có đóng góp. Bên ngoài toán học thì tình hình ít rõ ràng hơn, nhưng thật sai lầm nếu chỉ để giành những vấn đề quan trọng hoàn toàn cho các chuyên gia”.*

VLADIMIR GERSHONOVICH DRINFELD

GIẢI THƯỞNG FIELDS NĂM 1990



Vladimir Drinfeld thể hiện tài năng toán học đặc biệt từ rất sớm. Anh nhiều lần đạt giải cao trong các cuộc thi Olympic toán cho học sinh. Nhưng điều đáng nói là, với hầu hết mọi người thì cuộc thi Olympic kết thúc sau buổi nhận huy chương, nhưng với Drinfeld thì đó mới chỉ là bắt đầu. Anh tiếp tục suy nghĩ về bài thi, cố gắng tổng quát hoá, và kết quả của những suy nghĩ đó là công trình khoa học đầu tiên của Drinfeld, công bố khi anh còn là học sinh phổ thông! Đó là một công trình về lý thuyết số, kiểu các bất đẳng thức Hardy, mà đến ngày nay vẫn còn có giá trị.

Vladimir Drinfeld vào học tại trường đại học tổng hợp Matxcova năm 1969. Khi là sinh viên năm thứ hai, các công trình của Drinfeld đã mang tầm vóc của một nhà toán học lớn: Các bài báo về “môđun elliptic” mở ra một hướng mới cho toán học, phát triển mạnh mẽ cho đến tận ngày hôm nay, dưới tên gọi “môđun Drinfeld”.

Tốt nghiệp đại học năm 1974, Drinfeld ở lại trường làm nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của Manin. Tôi có cái may mắn được vào làm nghiên cứu sinh cùng một năm và cùng một thầy hướng dẫn với Drinfeld. Tất cả chúng tôi, những nghiên cứu sinh của Manin thời ấy, đều tin là Drinfeld sẽ có ngày được Giải thưởng Fields. Và điều đó đã thành sự thật năm 1990: Drinfeld được tặng Giải thưởng Fields nhờ những đóng góp trong Chương trình Langlands và nhóm lượng tử.

Chương trình Langlands là một tập hợp các định lý, giả thuyết, dự đoán nhằm hiểu về các nhóm Galois của các trường địa phương và toàn cục một chiều. Như Manin đã từng nói, “các nhóm Galois này là những đối tượng đầu tiên của số học, còn cơ bản hơn cả chính các số nguyên. Ít nhất thì phần lớn các chủ đề cổ điển của lý thuyết số, như các số nguyên tố, L -hàm, dạng môđula cũng bộc lộ nhiều cấu trúc bị che dấu khi nhìn từ lý thuyết Galois”. Trong thời kỳ “cổ điển”, thành tựu nổi bật nhất là lý thuyết trường các lớp, cho sự mô tả nhóm Galois của mở rộng abel của trường số k thông qua các tính chất số học của trường k . Mô tả nhóm Galois của trường đó cũng đồng nghĩa với mô tả biểu diễn một chiều của nhóm Galois của bao đóng đại số trên k . Langlands cho rằng, bước tiếp theo phải là mô tả biểu diễn n chiều. Mục tiêu của chương trình Langlands, nói một cách nôm na, là chỉ ra rằng, các biểu diễn n chiều đó có một song ánh tự nhiên với các biểu diễn vô hạn chiều bất khả quy tự đẳng cấu của nhóm $GL(n, k)$ các ma trận cấp n khả nghịch, với hệ số trong trường k (nhóm tuyến tính). Đồng thời, tương ứng nói trên được mô tả thông qua việc đồng nhất các L -hàm của biểu diễn Galois và của biểu diễn

nhóm tuyến tính. Trong trường hợp cổ điển, L -hàm là các biến đổi Mellin của dạng môđula.

Drinfeld chứng minh các giả thuyết Langlands cho trường hợp $GL(2)$ trên trường toàn cục có đặc số hữu hạn. Để chứng minh giả thuyết đó, Drinfeld đã xây dựng nên những lớp mới các không gian môđula. Trong khi các không gian môđula cổ điển tham số hoá các đường cong elliptic, các đa tạp abel, các cấu trúc Hodge thì để tham số hoá các đối tượng mới (trên trường đặc số hữu hạn), Drinfeld sáng tạo ra các “mô đun elliptic” (mô đun Drinfeld). Để xây dựng lý thuyết tổng quát hơn, Drinfeld đưa ra khái niệm “shtuka” (trong tiếng Nga có nghĩa là “cái”, như cái bàn, cái ghế,...). Ngày nay “shtuka Drinfelds” là công cụ chủ yếu khi nghiên cứu chương trình Langlands.

Chứng minh của Drinfelds là một chứng minh rất khó, cả về kỹ thuật lẫn logic. Mặc dù chứng minh đó đã phải đăng tải trên nhiều bài báo, Manin nói rằng, *“phần hay nhất của lý thuyết vẫn nằm trong bản thảo dài 800 trang chưa công bố. Nguyên nhân có thể là vì Drinfeld đã chuyển sang một mối quan tâm mới: nhóm lượng tử”*.

Các nhóm lượng tử lập thành một lớp con của các đại số Hopf, mà những ví dụ đầu tiên được đưa ra bởi các nhà vật lý toán thuộc trường phái Leningrad của Faddeev. Drinfeld là người đã xây dựng những khái niệm và định nghĩa cơ bản, hệ thống hóa thành một lý thuyết hoàn chỉnh, và làm cho nhóm lượng tử trở thành một lĩnh vực mới, thu hút sự quan tâm của thế giới toán học.

Ngoài những kết quả về chương trình Langlands và nhóm lượng tử, Drinfeld còn thu được những kết quả cơ bản trong nhiều lĩnh vực khác: phân loại các instanton (một loại nghiệm của phương trình Yang–Mills tự đối ngẫu), với “cấu trúc ADHM” nổi tiếng (ADHM là viết tắt tên bốn tác giả: Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin); lý thuyết thu gọn các hệ khả tích của phương trình vi phân đạo hàm riêng KdV (Korteweg de Vries); cho ước lượng cận trên chính xác của số điểm trên đường cong xác định trên trường hữu hạn cấp p^{2n} ; chứng minh rằng một độ đo hữu hạn cộng tính $SO(n+1)$ - bất biến trên S^n là độ đo Lebesgue trong trường hợp $n = 2, 3$ (xin nhắc lại rằng, kết quả trên trong trường hợp $n = 1$ hoặc $n \geq 4$ thuộc về những nhà toán học hàng đầu khác: Banach, Margulis, Sullivan).

A Jaffe và B Mazur nói về các công trình được Giải thưởng Fields của Drinfeld : *“Các mối quan tâm của Drinfeld chỉ có thể mô tả là “rất rộng”. Không chỉ làm việc trong hình học đại số và lý thuyết số, các tư tưởng mới nhất của ông đi theo*

một hướng hoàn toàn khác: Ông đã có những công trình quan trọng trong những vấn đề toán học được gợi ý bởi vật lý, trong đó có lý thuyết khá mới về các nhóm lượng tử”.

Drinfeld phá bỏ mọi cách xếp hạng bình thường... Sự đột phá của ông có một ma lực làm người ta hy vọng đến những phát kiến cách mạng trong toán học: chúng gần như có những hệ quả không bao giờ cạn. Một mặt, ông là một mẫu người hết sức cá biệt của toán học: *“chỉ Drinfeld mới có thể nghĩ về điều đó!”*. Nhưng ngược lại, điều ông nghĩ lại có vẻ tự nhiên đến nỗi, khi đã hiểu, người ta nói: *“ai cũng phải nghĩ về điều đó!”*.

Mặc dù là một thiên tài thực sự, Drinfeld đã gặp không ít khó khăn. Sau khi bảo vệ luận văn tiến sĩ năm 1978, ông phải về làm việc một số năm ở Upha, một thành phố thuộc vùng núi Uran của Nga. Vài năm sau, ông chuyển về làm việc tại Viện vật lý và kỹ thuật năng lượng thấp ở Ucraina. Sau ngày Liên Xô thực hiện chính sách đổi mới, nhiều nhà toán học Liên Xô đã ra nước ngoài làm việc. Riêng Drinfeld vẫn ở lại trong điều kiện hết sức khó khăn. Tôi nghe nhiều bạn bè nói lại rằng, Drinfeld cũng khuyên những người khác ở lại, để có thể đóng góp nhiều hơn cho việc giữ gìn nền khoa học Xô viết trong những hoàn cảnh khó khăn. Đến tận năm 1995 Drinfeld mới rời Liên Xô để nhận một ghế giáo sư tại đại học Chicago, Mỹ.

VAUGHAN FREDERICK RANDAL JONES

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1990



Vaughan Jones là nhà toán học đầu tiên của châu Đại Dương nhận được Giải thưởng Fields (người thứ hai là Terence Tao, Giải thưởng Fields 2006). Ông được trao giải thưởng cao quý đó nhờ những đóng góp trong nghiên cứu đại số von Neumann và tô pô hình học, đặc biệt trong lý thuyết nút và “link” (móc).

Để có thể hiểu sơ qua về nút và link, ta có thể hình dung như sau (một cách không chính xác về mặt toán học!). Nếu như các dây sợi nối giữa hai thanh trên và dưới của một cái khung cửa mà không bị rối, tức là các điểm tương ứng được nối thẳng với nhau, ta có một kiểu “bện” tầm thường. Nếu bị rối, tức là các sợi có thể không nối với điểm đối diện mà với điểm khác, (nhưng hai sợi tùy ý không được xuyên qua nhau), ta có một bện “không tầm thường”. Hai kiểu bện là tương đương nếu có thể chuyển thành nhau mà không cần cắt đứt sợi. Với các lớp tương đương đó, ta được một “nhóm bện”. Nếu ta “đồng nhất hai đầu nút của mỗi sợi”, như kiểu nối đầu trên với đầu dưới, ta



được một “nút”. Xét nút nhúng trong một mặt cầu 3 chiều, ta được một “link”. Nghiên cứu các nút và link tức là nghiên cứu một hiện tượng rất phổ biến của tự nhiên, chẳng hạn các chuỗi AND luôn là những nút rất phức tạp. Các nút được xét trong công trình của Jones còn xuất hiện trong nhiều bài toán của cơ học thống kê. Để phân loại các nút, tức là xét xem những nút nào thực chất là hoàn toàn như nhau, ta sử dụng các bất biến. Đó là các số, các đa thức ứng với mỗi nút, mà nếu hai nút có các đặc trưng đó như nhau thì chúng được xếp vào cùng một lớp.

Năm 1984 Jones phát hiện ra mối liên quan đáng kinh ngạc giữa các đại số von Neumann và tô pô hình học. Nhờ đó, ông tìm ra bất biến đa thức mới của các nút và link trong không gian 3 chiều. Cũng là điều đáng ngạc nhiên, khi mà các *bất biến Jones* đã hoàn toàn bị bỏ qua bởi những nhà tô pô đi trước, mặc dù họ đã có những nỗ lực trong rất nhiều vấn đề liên quan gần gũi với nó trong suốt 60 năm, kể từ những công trình đầu tiên của Alexander năm 1928. Những phát kiến của Jones được tìm thấy nhờ việc kết hợp nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và vật lý, như các đại số von Neumann chiều liên tục, nhóm lượng tử, lược đồ Dynkin và

biểu diễn đại số Lie đơn, nút và link trong không gian 3 chiều, cơ học thống kê. Trung tâm của những mối liên hệ này là “*định lý chỉ số Jones*”. Cũng cần nhấn mạnh rằng, cho đến trước các công trình của Jones, người ta chưa biết đến mối liên quan giữa nhóm lượng tử (phương trình Yang–Baxter) với đại số von Neumann. Sự phát hiện ra quan hệ giữa mô hình Potts trong cơ học thống kê với lý thuyết nút và link cũng đã mở ra một chương mới trong mối liên quan giữa toán học và vật lý.

Khi giới thiệu công trình của Jones tại Đại hội toán học quốc tế 1990, Birman kết luận:

“Còn có đa thức link khác, đó là đa thức Alexander nổi tiếng. Nó được phát hiện năm 1928, và có tầm quan trọng cơ bản trong lý thuyết nút, cả đối với trường hợp cổ điển của các nút trong mặt cầu ba chiều lẫn trường hợp các nút chiều cao. Một thời gian ngắn sau phát kiến của Jones năm 1984, người ta hiểu được rằng, thực ra cả đa thức Jones và đa thức Alexander đều là những đặc biệt hoá của đa thức Jones hai biến....Jones còn có ảnh hưởng lớn trong toán học không chỉ bởi các kết quả, mà còn



bởi cách làm việc của ông. Đó là cách làm việc không câu nệ hình thức, mà khuyến khích các trao đổi ý tưởng một cách cởi mở và tự do. Trong một ít năm, Jones đã viết thư cho nhiều người khác nhau để mô tả các phát kiến mới quan trọng của ông ngay từ giai đoạn đầu của chúng, khi mà ông còn chưa cảm thấy sẵn sàng để gửi công bố trên các tạp chí, vì còn phải làm việc nhiều thêm nữa. Ông không bao giờ yêu cầu giữ kín các bức thư của ông, nên chúng được phổ biến một cách rộng rãi. Vì thế không có gì ngạc nhiên là ông trở thành một nguồn ý tưởng phong phú cho những người khác trong công việc. Tính cởi mở và hào phóng của ông trong vấn đề này là chính là truyền thống và tinh thần tốt đẹp nhất của toán học”.

Vaughan Jones sinh ngày 31 tháng 12 năm 1952 ở Gisborne, New Zealand. Do học tập xuất sắc ở bậc trung học, ông được tặng học bổng Gilles và học bổng của hãng Phillips Industries để vào học tại đại học Auckland. Tốt nghiệp xuất sắc đại học Auckland năm 1972 và nhận bằng thạc sĩ với “*vinh dự loại một*”, ông nhận

được học bổng của Chính phủ Thụy Sĩ để đến nghiên cứu tại Thụy Sĩ, lúc đầu ở trường Bách Khoa Geneva, sau đó chuyển đến đại học Geneva. Jones vừa làm việc dưới sự hướng dẫn của Haefliger, vừa làm trợ giảng. Năm 1979 ông nhận bằng tiến sĩ, và ngay năm sau được tặng Giải thưởng Constantin vì luận án xuất sắc.

Từ năm 1980, ông chuyển sang làm việc tại Mỹ, và từ 1985 là giáo sư của đại học California ở Berkeley.

Jones nhận được nhiều giải thưởng cao quý: Giải thưởng của các quỹ danh giá như Sloan (1983) và Guggenheim (1986), Giải thưởng Fields (1990), Huy chương khoa học của Chính phủ New Zealand (1991). Ông được bầu là Viện sĩ Viện hoàng gia Anh (1990), Viện sĩ Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ. Jones là Tiến sĩ danh dự của các trường đại học Auckland (1992) và Wales (1993).

SHIGEFUMI MORI

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1990



Sự phát triển sâu sắc và kì diệu nhất của hình học đại số trong thập kỷ 80 của thế kỷ 20, theo Hironaka, là *Chương trình mô hình tối thiểu* hay là *Chương trình Mori* trong mối liên hệ với vấn đề phân lớp các đa tạp đại số 3 chiều. Shigefumi Mori đã đề xướng chương trình này với một kỹ thuật mạnh mẽ và hoàn toàn mới, hướng dẫn nhiều cộng sự cùng thực hiện, và rút cuộc chính mình hoàn thiện chương trình sau khi vượt qua trở ngại cuối cùng. Chương trình của Mori mang tính kiến thiết, và kết quả cuối cùng đạt được nhiều hơn là một định lý về sự tồn tại mô hình tối thiểu. Ngay định lý tồn tại tự nó đã là một kết quả cơ bản hướng đến việc phân lớp các đa tạp đại số tổng quát 3 chiều sai khác một biến đổi song hữu tỷ¹⁴. Hơn nữa, bản chất kiến thiết của chương trình đã cho cách để phân tích biến đổi song hữu tỷ tổng quát các đa tạp 3 chiều thành các biến đổi sơ cấp, mà chúng về nguyên tắc có thể mô tả dưới dạng hiện. Các định lý của Mori về đa tạp đại số 3 chiều là tuyệt vời và đẹp đẽ nhờ đặc tính hoàn toàn mới của chúng, không thể hình dung nổi với những nhà hình học đại số chỉ làm việc trong thế giới truyền thống của các mặt giải tích phức (chiều 2). Số chiều 3, trên thực tế, là một bước nhảy lượng tử so với số chiều 2 trong hình học đại số.

Về mặt lịch sử, phân lớp các đa tạp đại số luôn luôn là vấn đề cơ bản của hình học đại số, thậm chí là giấc mơ cuối cùng của các nhà hình học đại số. Trong những thập niên đầu của thế kỷ 20, có nhiều phát minh quan trọng về phân lớp các mặt đại số, mà không thể hình dung được trong trường hợp đường cong (một chiều). Những kết quả đó chủ yếu được cho bởi trường phái Italia nổi tiếng, như Guido Castelnuovo (1865–1952), Federigo Enriques (1871–1946), Francesco Severi (1889–1961). Từ đó, có nhiều cố gắng để hiện đại hoá, chính xác hoá, xây dựng lại một cách chặt chẽ lý thuyết các mặt đại số. Đáng chú ý nhất là kết quả của các trường phái xung quanh Zariski, Kodaira, Shafarevich, Manin, Tiurina, Moishezon nghiên cứu các mặt đại số quan trọng và biến dạng của chúng. Bombieri, Mumford đưa lên trường hợp đặc số dương. Sang thập kỷ 70, người ta bắt đầu nghiên cứu cho trường hợp chiều 3. Manin, Iskovskikh và Sokurov bắt đầu việc phân lớp các đa tạp Fano 3 chiều. Tuy nhiên, vấn đề chỉ được giải quyết bởi Mori vào năm 1980, sau khi đã đưa vào nhiều kỹ thuật mạnh mẽ mới.

Năm 1979, Mori chứng minh giả thuyết Hartshorne nói rằng chỉ có các không gian xạ ảnh là các đa tạp đại số đầy đủ, trơn với phân thớ tiếp xúc “ample” (có thể

¹⁴ Xem phần viết về Hironaka trong tập sách này.

dịch là “phong phú”). Điều này cũng là một kết quả tuyệt vời của hình học vi phân, vì Y-T Siu và S-T Yau đã chứng minh một cách độc lập giả thuyết Frankel, một hệ quả của giả thuyết Hartshorne. (Cho đến nay vẫn chưa rõ là liệu giả thuyết Hartshorne có chứng minh được bằng phương pháp của Siu và Yau hay không). Hironaka nói rằng, các ý tưởng của Mori thì rất tự nhiên và đơn giản, nhưng chứng minh thì không!

Shigefumi Mori sinh ngày 23 tháng 2 năm 1951 ở Nagoya, Nhật bản. Ông học tại trường đại học Kyoto, nhận bằng cử nhân ở đó năm 1973 và bằng Thạc sĩ năm 1975. Trong năm đó, ông được bổ nhiệm làm trợ giảng tại Kyoto và làm nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của Masayoshi Nagata. Mori bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1978 với đề tài “*Các vành tự đồng cấu của một số đa tạp aben*”. Sau khi nhận bằng tiến sĩ, Mori ở lại làm trợ giảng tại Kyoto đến năm 1980, rồi được nhận làm giảng viên tại đại học Nagoya. Năm 1988, ông được phong giáo sư của đại học Nagoya, và từ 1990 Mori trở về nhận ghế giáo sư tại đại học Kyoto.

Trong những năm từ 1977 đến 1980, ông nhiều lần đến làm việc tại các trung tâm nổi tiếng như đại học Harvard, Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton, đại học Columbia và đại học Utah.

Mori được trao Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học quốc tế năm 1990 họp tại Kyoto, nơi ông đã học tập và trưởng thành. Những công trình mang lại Giải thưởng Fields cho Mori đã được hoàn thành trong khoảng 12 năm, kể từ 1978 khi ông chứng minh giả thuyết Hartshorne.

Do những cống hiến xuất sắc của mình, Mori đã nhận được nhiều giải thưởng: Giải thưởng Yanaga của Hội toán học Nhật Bản năm 1983, Giải thưởng văn hoá C. Dhunichi năm 1984, Giải thưởng của Hội toán học Nhật Bản (cùng với Kawamata) năm 1988, giải thưởng Inoue năm 1989, và cuối cùng, Giải thưởng Fields năm 1990. Cùng năm đó, ông được trao Giải thưởng Cole về đại số của Hội toán học Mỹ. Trong lời giới thiệu về Mori khi nhận Giải thưởng Cole có đoạn : “*Ủy ban giải thưởng nhất trí quyết định rằng Giải thưởng Cole 1990 về đại số được trao cho Shigefumi Mori vì những công trình xuất sắc của ông trong vấn đề phân lớp các đa tạp đại số. Mori đã thực hiện những bước quyết định trong khoảng thời gian hơn 10 năm nhằm phát triển lý thuyết cổ điển của các mặt đại số sang trường hợp chiều 3; trước khi có những ý tưởng tuyệt vời của Mori vấn đề tưởng như không với tới được. Công trình đẹp đẽ của Mori cũng đánh dấu sự xâm nhập quan trọng vào bài toán ở số chiều cao hơn*”.

EDWARD WITTEN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1990

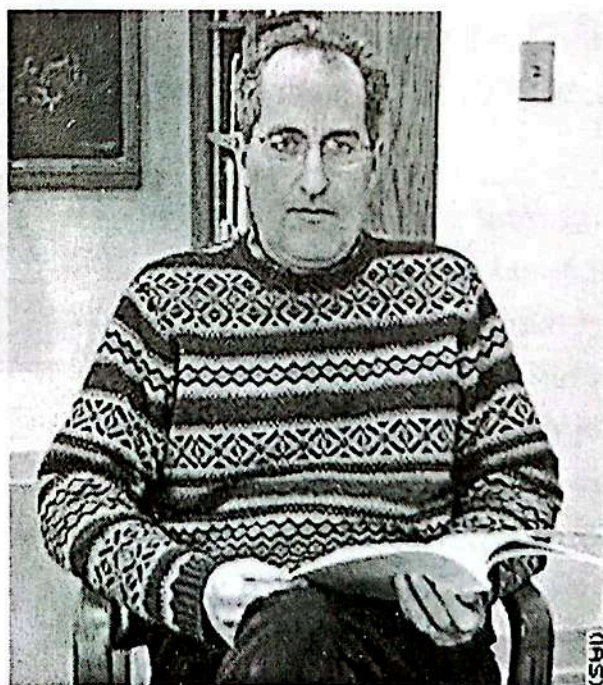


Theo bảng xếp hạng nghiên cứu Brane (Special Topics analysis of Brane research ranks), Witten đứng trong “top 5” các nhà vật lý trong thập niên gần đây, với 23 công trình được trích dẫn 1928 lần, và có 5 công trình nằm trong “top 25”. Điều thú vị là, Edward Witten, nhà vật lý hàng đầu thế giới, lại nhận được giải thưởng cao nhất của toán học, Giải thưởng Fields, năm 1990. Ông là người đề xuất một mở rộng của vật lý dây gọi là “*M-lý thuyết*” để thống nhất năm lý thuyết dây tách biệt thành một lý thuyết “master” (“Magic, Mystery, Matrix”).

Theo Faddeev, người giới thiệu Witten tại Đại hội 1990, vật lý luôn luôn là nguồn cảm ứng và động lực cho toán học phát triển. Trước đây, quan hệ giữa vật lý và toán học thường thông qua phương trình vi phân đạo hàm riêng. Tuy nhiên kỷ nguyên lượng tử đã dần dần đưa đến một cuộc sống mới. Ngày nay, đại số, hình học, tôpô, giải tích phức và hình học đại số đã bước vào vật lý toán một cách tự nhiên, và đưa lại những nhận thức mới. Trong bức tranh đó, Edward Witten nổi lên như là một nhân vật nhiều ảnh hưởng nhất. Mặc dù ông là nhà vật lý thực sự, song rất ít nhà toán học có thể so sánh với ông về các kết quả toán học, và khả năng mô tả các tư tưởng vật lý bằng toán học của ông là độc nhất vô nhị. Ông luôn làm giới toán học ngạc nhiên vì những áp dụng tuyệt vời các ý tưởng của vật lý để dẫn đến những định lý mới và sâu sắc của toán học.

Những kết quả nổi tiếng nhất của Witten thuộc vào hai lĩnh vực: lý thuyết dây và siêu đối xứng. Đó là những lý thuyết với tham vọng mô tả các lực cơ bản của tự nhiên, là lực hấp dẫn và lực tương tác giữa các hạt cơ bản, trong một mô hình thống nhất. Vì lẽ đó, nhiều người ví Witten với Einstein và Newton của thời hiện đại.

Một trong những công trình có tầm ảnh hưởng nhất của Witten là công trình về siêu đối xứng và lý thuyết Morse, trong đó ông chỉ ra “cơ học lượng tử siêu đối xứng” chính là lý thuyết Hodge-de



Rham. Faddeev cho rằng, chỉ riêng phần thuần túy cổ điển của công trình đã có ảnh hưởng lớn và dẫn đến những kết quả trong các lĩnh vực như giải tích phức và lý thuyết số.

Witten đưa ra một dãy vô hạn phương trình xuất hiện tự nhiên trong lý thuyết dây, mà với chúng tích phân đường Feynman cho một cách giải thích heuristic của tính cứng. Cũng như các công trình khác của Witten, nó rất chính xác và chi tiết trong những khía cạnh hình thức, cổ vũ mạnh mẽ cho các nghiên cứu trong lĩnh vực này.

Witten đã chỉ ra các bất biến Jones của nút có thể mô tả như tích phân Feynman của lý thuyết Gauge 3 chiều. Lý thuyết Witten là một bước đột phá quan trọng, vì nó là lý thuyết duy nhất mô tả 3 chiều nội tại của bất biến Jones: Mọi cách định nghĩa trước đây đều dùng một biểu diễn nút bởi lược đồ phẳng hoặc nhóm bện. Mặc dù cho đến nay tích phân Feynman chỉ là một công cụ heuristic và không dẫn đến sự phát triển chính xác trên quan điểm Hamilton, cách tiếp cận của Witten nhanh chóng chỉ ra cách phát triển lý thuyết Jones từ nút trong mặt cầu 3 chiều đến nút trong đa tạp 3 chiều tùy ý.

Một kết quả quan trọng khác của Witten là chứng minh tính dương của năng lượng trong lý thuyết hấp dẫn của Einstein. Trong thuyết tương đối tổng quát, giả thuyết khối lượng dương nói rằng năng lượng toàn phần của một hệ hấp dẫn là dương, chỉ bằng 0 trong trường hợp không gian Minkowski phẳng. Giả thuyết này lôi cuốn sự chú ý trong nhiều năm, và được chứng minh trong nhiều trường hợp riêng, cho đến khi có lời giải hoàn toàn của Yau và Shoen. Chứng minh nói trên sử dụng phương trình đạo hàm riêng phi tuyến và các mặt cực tiểu, và đã góp phần mang lại Giải thưởng Fields cho Yau năm 1982.



Witten đưa ra một cách biểu diễn mới của năng lượng thông qua nghiệm phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, và qua đó cho một chứng minh đặc sắc và đơn giản của vấn đề năng lượng dương. Cách tiếp cận của ông có nguồn gốc từ những ý tưởng trong lý thuyết siêu đối xứng, và đó chính là cách nghĩ điển hình của Witten.

Atiyah cho rằng, Witten có ảnh hưởng sâu sắc trong toán học hiện đại. Trong tay ông, vật lý lại một lần nữa cung cấp một nguồn phong phú cho cảm hứng và tư duy toán học. Tất nhiên tư duy vật lý không phải luôn dẫn đến ngay tức khắc các

chứng minh toán học chặt chẽ, nhưng chúng thường đưa người ta đi theo một con đường đúng, và các chứng minh kỹ thuật chặt chẽ sau đó có thể hy vọng tìm được. Đó là trường hợp các công trình của Witten. Cho đến nay các ý tưởng chưa bao giờ làm ông sai đường, và các chứng minh chính xác theo tiêu chuẩn mà các nhà toán học hy vọng luôn đến liền sau đó.

Năm 1996 tạp chí *Time* bình chọn 50 người có ảnh hưởng nhất ở nước Mỹ, Witten đứng thứ 6, liền sau đó, Bill Gate thứ 7.

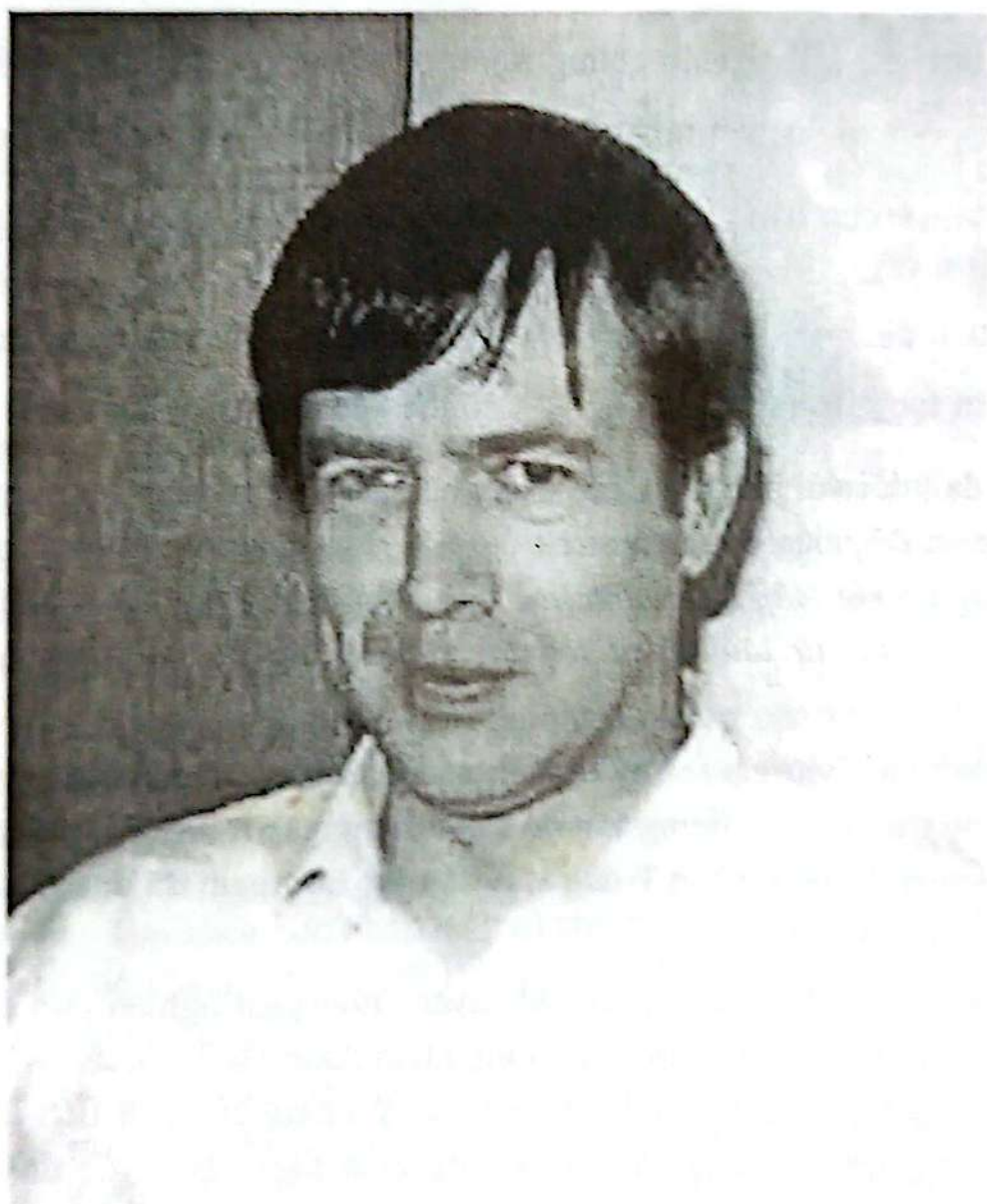
Khi được hỏi về ảnh hưởng của những kết quả trong lĩnh vực mà ông nghiên cứu đối với quảng đại quần chúng, Witten trả lời: Quần chúng luôn luôn muốn hiểu rõ hơn về vũ trụ. Khi Einstein mô tả thuyết tương đối trong thuật ngữ độ cong của không gian và thời gian, nhiều người rất quan tâm, mặc dù họ không hiểu về các khái niệm toán học. Witten nghĩ rằng, những phát kiến trong vật lý các hạt cơ bản có thể có ảnh hưởng lớn. Chẳng hạn, những nhà vật lý thực nghiệm đang tìm kiếm “siêu đối xứng” – một cấu trúc đối xứng mới của không gian và thời gian– bằng các máy gia tốc. Witten tin rằng, siêu đối xứng sẽ được tìm thấy trong ít năm nữa, khi đó mọi người sẽ rất quan tâm, và khi đó các nhà vật lý sẽ có rất nhiều việc để làm.

Edward Witten sinh ngày 26 tháng 8 năm 1951 ở Baltimore, bang Maryland, nước Mỹ. Ông tốt nghiệp trường đại học Brandies ở Boston năm 1971, rồi chuyển đến học tại Princeton và bảo vệ luận án tiến sĩ ở đó năm 1976. Ông làm việc nhiều năm ở Harvard và Princeton, là giáo sư vật lý của Princeton từ năm 1980 đến 1987. Năm 1987, ông chuyển đến Viện nghiên cứu cao cấp Princeton, làm giáo sư ở khoa tự nhiên.

Witten được bầu vào Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ (1984); Viện hàn lâm quốc gia Mỹ (1988); được tặng giải thưởng của Hội toán học và vật lý New York (1985); Giải thưởng Dirac của Trung tâm vật lý lý thuyết quốc tế ở Trieste (1985); Giải thưởng Alan Waterman của Quỹ nghiên cứu khoa học quốc gia Mỹ (1986). Ông là Tiến sĩ danh dự của đại học Brandies, đại học Hebrew.

JEAN BOURGAIN

GIẢI THƯỜNG FIELDS 1994



Rất khó nói trong một câu ngắn gọn là Jean Bourgain được trao Giải thưởng Fields vì đã xây dựng lý thuyết nào hay giải quyết vấn đề nào. Lý do là ông đã giải quyết không phải chỉ một mà rất nhiều bài toán khó của giải tích toán học, xuyên suốt hầu như mọi vấn đề trung tâm của giải tích.

Tại Đại hội toán học quốc tế ở Zurich năm 1994, khi giới thiệu các công trình của Bourgain, Caffarelli đã ca ngợi : *"Công trình của Bourgain đề cập đến những chủ đề trung tâm của giải tích toán học: hình học các không gian Banach, tính lồi trong chiều cao, giải tích điều hoà, lý thuyết ergodic, và cuối cùng, các phương trình vi phân đạo hàm riêng phi tuyến trong vật lý toán"*.

Trong giải tích hàm, Bourgain chứng minh bất đẳng thức Satalo về thể tích của một khối cầu đơn vị đối với một chuẩn nào đó trên $\mathbb{R}^n$. Kết quả này có những hệ quả quan trọng trong hàng loạt lĩnh vực khác nhau, từ lý thuyết số đến khoa học máy tính lý thuyết.

Trong giải tích điều hoà, Bourgain có kết quả quan trọng về hàm cực đại cầu. Cho một hàm liên tục f trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, có thể xác định một hàm mới F trong đó $F(x)$ là cực đại, đối với bán kính, của trung bình các giá trị hàm f trên mặt cầu tâm tại x . Bourgain đã nhận được cận trên đối với F trong trường hợp 2 chiều, bằng cách sử dụng những *"lập luận hình học tinh tế"*. Kết quả này cũng giải quyết một vấn đề mở tồn tại từ lâu về sự tồn tại một số tập fractal trên mặt phẳng" (Cafferelli).

Các công trình của Bourgain về lý thuyết ergodic liên quan đến những vấn đề tinh tế về sự hội tụ theo điểm. Những vấn đề này thường gặp trong giải tích điều hoà và có một tầm quan trọng cơ bản. Trong vấn đề này, Bourgain đã đưa ra các ý tưởng và kỹ thuật hoàn toàn mới.

Trong phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, Bourgain nghiên cứu các phương trình tán xạ với các dữ liệu tuần hoàn. Ông nhận được các kết quả cho trường hợp dữ liệu ban đầu kỳ dị, bằng cách kết hợp các ý tưởng của giải tích điều hoà, lý thuyết số, cùng với việc đưa vào các không gian hàm phi tuyến mới. Những ý tưởng của ông có nhiều ứng dụng rộng rãi.

Lindenstrauss cũng viết về Bourgain : *"Ông có một năng lực về giải tích đặc biệt mạnh mẽ mà ông thường kết hợp với các ý tưởng và phương pháp của giải tích "mềm" để giải quyết một danh sách dài các bài toán khó nổi tiếng trong nhiều"*

lĩnh vực khác nhau. Trong công trình của ông, người ta cũng tìm thấy những mối liên quan kỳ lạ và tuyệt vời giữa những lĩnh vực mà trước đó là hoàn toàn xa lạ”.

Về không gian Banach, Bourgain xét vấn đề về “độ lớn” có thể của một thiết diện của không gian Banach vô hạn chiều sao cho nó có thể xem như một không gian con Hilbert. Năm 1989 ông đã thu được một số kết quả tuyệt vời về vấn đề này, bằng cách sử dụng các phương pháp của giải tích và xác suất. Ông đã giải quyết bài toán $L(p)$ tồn tại từ lâu trong lý thuyết không gian Banach và giải tích điều hoà.

Jean Bourgain sinh ngày 28 tháng 2 năm 1954 ở Ostende, nước Bỉ. Năm 1975 ông nhận được tài trợ của Quỹ nghiên cứu khoa học quốc gia Bỉ để làm nghiên cứu sinh tại trường đại học Tự do ở Brussels. Bảo vệ luận văn tiến sĩ năm 1977, ông ở lại trường để tiếp tục nghiên cứu và làm luận án tiến sĩ khoa học. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ khoa học tại trường đại học Tự do năm 1979, và cùng năm đó, nhận được Giải thưởng Alumni của Quỹ nghiên cứu khoa học quốc gia Bỉ.

Năm 1983, Bourgain nhận được Giải thưởng Empain của Quỹ nghiên cứu khoa học quốc gia Bỉ, và Giải thưởng Salem. Năm 1985, ông được trao vinh dự cao nhất về khoa học của Bỉ, Giải thưởng Damry–Deleeuw–Bourlart. Cùng trong năm đó, Bourgain được Viện hàn lâm khoa học Pháp trao Giải thưởng Langevin. Năm 1990, Viện hàn lâm khoa học Pháp lại trao cho ông giải thưởng cao nhất của mình, Giải thưởng Elie Cartan. Năm 1991 ông nhận được Giải thưởng Ostrowski của Quỹ Ostrowski của Thụy Sĩ.

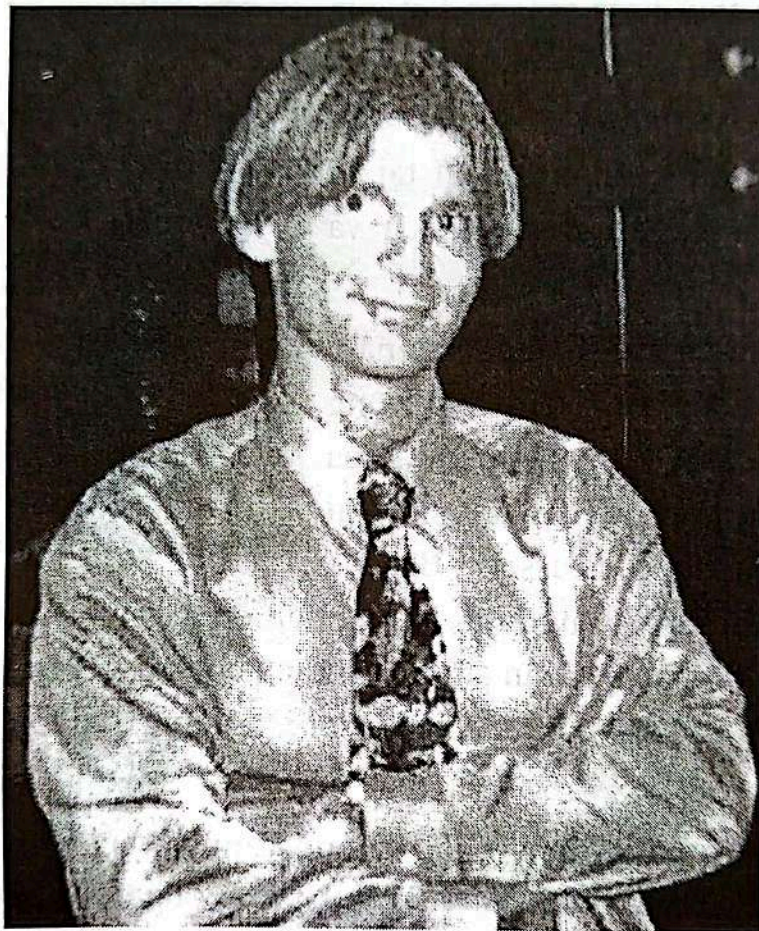
Năm 1981 Bourgain được phong chức giáo sư trường đại học Tự do ở Brussels. Ông giữ ghế giáo sư ở đó cho đến năm 1985 thì rời Bỉ để nhận ghế giáo sư tại đại học Illinois (Mỹ), đồng thời là giáo sư tại Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES) ở Bures-sur-Yvette (Pháp). Năm 1995, ông rời Viện IHES để nhận chức giáo sư tại Viện nghiên cứu cao cấp Princeton.

Bourgain được phong tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học: Hebrew ở Israel, Marne-la-Valle ở Pháp, đại học Tự do ở Brussels.



PIERRE-LOUIS LIONS

GIẢI THƯỜNG FIELDS 1994



Các đóng góp của Pierre-Louis Lions trải rộng trên nhiều lĩnh vực, từ lý thuyết xác suất đến phương trình đạo hàm riêng. Trong phương trình đạo hàm riêng, ông đã có nhiều kết quả đẹp đẽ về phương trình phi tuyến. Sự lựa chọn vấn đề nghiên cứu của Lions luôn luôn xuất phát từ ứng dụng. Ta biết rằng, nhiều vấn đề của vật lý, kỹ thuật và kinh tế khi phát biểu trong thuật ngữ toán học dẫn đến các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Thường đó là những bài toán rất khó. Tính phi tuyến làm cho các phương trình trở nên khác biệt nhau về bản chất. Do đó không thể hy vọng có một lý thuyết hoàn chỉnh, lại cũng không thể chỉ làm việc với từng ví dụ khác nhau với những phương pháp không liên quan với nhau. Công trình của Lions quan trọng ở chỗ ông đã phát triển các kỹ thuật mà với một ít thay đổi, có thể áp dụng cho nhiều lớp bài toán.

Trong khoảng thời gian từ 1980 đến 1990, Lions đã có nhiều đóng góp quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Evans viết về các kết quả của Lions : “Ông có những phát minh thực sự cơ bản, xuyên suốt nhiều lĩnh vực, lý thuyết và ứng dụng, các công bố của ông nhiều và đa dạng đến nỗi nó phá vỡ mọi cách phân loại. Cần lưu ý rằng, trên thực tế không có, và không thể có một lý thuyết trung tâm gốc rễ nào cho các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Nguồn gốc của những phương trình đạo hàm riêng là quá nhiều: vật lý, xác suất, hình học, v.v...; mỗi chủ đề lại là một tập hợp những lĩnh vực nhỏ hơn ; việc nghiên cứu các hiện tượng khác nhau đối với các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến khác nhau đòi hỏi những phương pháp hoàn toàn khác nhau. Pierre-Louis Lions là độc nhất vô nhị với khả năng khó tin nổi trong việc vượt qua những biên giới và giải quyết những bài toán thời sự xuyên suốt lĩnh vực”.

Khi làm việc với các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, ta cần chấp nhận những nghiệm không trơn hoặc không cổ điển. Khác với trường hợp tuyến tính, ta không thể dùng lý thuyết phân bố để định nghĩa khái niệm nghiệm yếu. Người ta phải đưa vào một khái niệm thích hợp của nghiệm suy rộng, hy vọng có thể áp dụng được cho một lớp rộng, và đủ để xây dựng một lý thuyết đầy đủ về sự tồn tại, duy nhất và ổn định của lớp nghiệm. Cách làm này phải tính đến việc làm thế nào để cho phép một số kiểu kỳ dị “đúng đắn vật lý”, và ngăn cản những kỳ dị khác. Cùng với Evans, Crandall, Ishii và một số người khác, Lions phát triển “phương pháp nhót”, áp dụng được cho một lớp rộng các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, gọi là phương trình elliptic suy biến cấp hai phi tuyến đầy đủ. Lớp phương trình này chứa nhiều lớp con quan trọng xuất hiện trong nhiều tình huống khác nhau.

Lions đã đưa những ý tưởng mới trong các công trình của ông về phương trình Boltzman và các phương trình động học khác.

Phương trình Boltzman mô tả tương tác giữa các hạt cơ bản khi chúng va chạm nhau, không phải xét riêng cho từng cá thể, mà xét theo độ trù mật của các hạt. Vấn đề này có một lịch sử lâu dài. Tính trơn và duy nhất của nghiệm đã nhận được một cách địa phương (xét hệ trong một thời gian ngắn), hoặc toàn cục nhưng với các dữ liệu ban đầu gần ổn định. Trong trường hợp tổng quát, định lý tồn tại nghiệm toàn cục chưa bao giờ được chứng minh. Năm 1989, Lions, trong công trình chung với Di Perma, lần đầu tiên cho nghiệm chặt chẽ với dữ kiện ban đầu tùy ý.

Một đóng góp lớn nữa của Lions là các kết quả trong lĩnh vực các bài toán biến phân. Có nhiều phương trình đạo hàm riêng phi tuyến là các phương trình Euler đối với bài toán biến phân. Bước đầu tiên để giải các phương trình này là phương pháp biến phân, cho phép chỉ ra sự đạt được cực trị, chẳng hạn như cực tiểu năng lượng. Tuy nhiên điều này kéo theo sự đòi hỏi nào đó về tính compact. Nếu miền đang xét không compact, vấn đề trở nên rất không rõ ràng. Lions đã có những ý tưởng đột phá để giải quyết bài toán, được áp dụng một cách có hiệu quả trong nhiều vấn đề quan trọng. Ông đã đưa vào kỹ thuật gọi là “compact tập trung”, nhằm tìm kiếm sự tập trung năng lượng và loại được khó khăn xuất hiện khi cực tiểu hoá mà không có tính compact. Lions cũng đưa ra một số độ đo để xét sự tập trung.

Pierre--Louis Lions sinh ngày 11 tháng 8 năm 1956 ở Grasse, vùng Alpes-Maritimes, gần thành phố Cannes nổi tiếng. Ông là con của Jacques--Louis Lions, chuyên gia hàng đầu thế giới về phương trình đạo hàm riêng.

Khi Pierre--Louis lên sáu, cha ông nhận ghế giáo sư ở Paris, và gia đình ông chuyển về sống ở Paris. Tại đó, Pierre--Louis được theo học những trường nổi tiếng bậc nhất nước Pháp, như Lycée Pasteur và Lycée Louis--le--Grand, rồi Eclole Normale Supérieure. Lions bảo vệ luận án tiến sĩ quốc gia năm 1979, khi mới 23 tuổi.

Từ năm 1979 đến 1981 Lions là nghiên cứu viên của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia (CNRS) Pháp. Năm 1981 ông được phong giáo sư của đại học Paris--Dauphine. Lions cũng đồng thời là giám đốc nghiên cứu của CNRS từ 1995, và là giáo sư toán ứng dụng của trường Bách khoa Paris từ 1992.

Jean-Pierre Lions là Viện sĩ của Viện hàn lâm khoa học Pháp, được tặng Giải thưởng Doistau-Blutet năm 1986 và Giải thưởng Ampère năm 1992. Ông cũng được trao Giải thưởng IBM năm 1987 và Giải thưởng Philip Morris năm 1991. Lions còn là Viện sĩ của Viện hàn lâm Napoli, Viện hàn lâm châu Âu, được tặng Bội tinh danh dự. Ông là Tiến sĩ danh dự của đại học Heriot-Watt ở Edinburgh, Scotland.

Ngoài toán học, thú vui của ông là xem phim, đọc sách, chơi bóng bầu dục và bơi lội.

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1994



Jean-Christophe Yoccoz được trao Giải thưởng Fields nhờ những công trình cơ bản trong lý thuyết hệ động lực. Có thể nói, ông là một trong những chuyên gia giỏi nhất của thế giới trong lĩnh vực này.

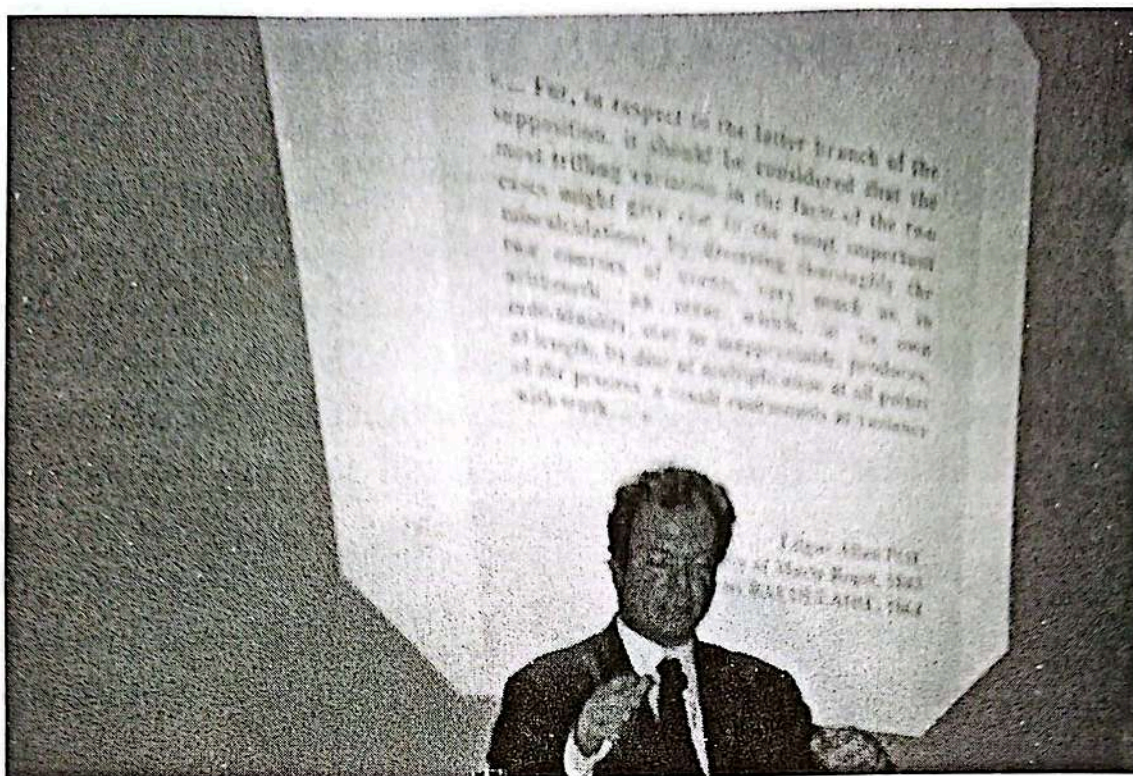


Yoccoz đang báo cáo khoa học

Lý thuyết hệ động lực được bắt đầu từ những công trình của Poincaré, và theo Yoccoz (viết trong một bài đăng ngày 13 tháng 5 năm 2005), có thể nói là sinh ra từ “một sai lầm của Poincaré”. Mọi chuyện bắt đầu vào năm 1887, khi vua Oskar đệ nhị của Thụy Điển tổ chức một kỳ thi toán, theo lời khuyên của Mittag-Leffler. Năm 1889, giải thưởng được trao cho Henri Poincaré, nhà toán học Pháp lúc đó tròn 33 tuổi, với công trình “bài toán ba vật thể”. Đó là bài toán liên quan đến luật hấp dẫn của Newton nói về các chuyển động của thiên thể trong một hệ nào đó, như hệ mặt trời. Tuy nhiên người ta chỉ giải được hoàn toàn các phương trình trong trường hợp hệ chỉ chứa hai vật thể. Công trình của Poincaré là một bước tiến lớn trong lĩnh vực này, nhưng điều đáng tiếc (hay điều may mắn cho khoa học?) là sau vài tháng, Phragmen phát hiện ra một sai lầm trong bài báo, và ông công bố phát hiện của mình. Poincaré bỏ tiền mua tất cả các số báo có đăng bài của Phragmen, và quyết tâm khắc phục sai lầm. Chỉ sau một năm, năm 1890, Poincaré hoàn thành việc sửa sai, và cho ra đời một lý thuyết có tầm quan trọng rất lớn đến tận ngày

hôm nay, gọi là “lý thuyết hỗn độn”. Đó cũng được xem là điểm khởi đầu của lý thuyết hệ động lực, một lý thuyết nhằm nghiên cứu sự tiến hoá của một hệ nào đó trong một khoảng thời gian dài, khi biết luật tiến hoá sơ cấp, tức là quy luật mô tả sự biến đổi trạng thái của hệ từ một thời điểm sang thời điểm tiếp theo. Poincaré đã dùng lý thuyết đó để nghiên cứu sự ổn định của hệ mặt trời, và ông đã phát hiện ra các hiện tượng rất phức tạp nhưng lại được điều khiển bởi quy luật sơ cấp rất đơn giản. Lý thuyết hệ động lực của ông được áp dụng vào nhiều lĩnh vực khác nhau: Cơ học, Hóa học, Sinh học, Môi trường, nói chung là trong tất cả các lĩnh vực mà ở đó có các hệ tiến hoá.

Từ sau công trình của Poincaré, nhiều nhà toán học đã tham gia phát triển lý thuyết hệ động lực, áp dụng lý thuyết đó vào nhiều tình huống rất tổng quát. Họ cũng đồng thời nghiên cứu rất sâu nhiều ví dụ cụ thể, vừa đơn giản nhưng lại vừa điển hình, nơi có thể rút ra nhiều lý luận tổng quát, cũng đồng thời có thể mô tả, tính toán rất cụ thể. Đặc biệt nhất trong số đó là trường hợp bài toán lặp các đa thức phức, bài toán dẫn đến các vật thể fractal, các tập Julia và Mandelbrot. Bài toán lặp các đa thức phức đã thu hút nhiều tên tuổi lớn nhất của toán học: Fatou, Julia, Kolmogorov, Siegel, Arnold, Smale, Herman, Yoccoz, và nhiều người khác. Một trong những kết quả quan trọng của họ là thiết lập tính ổn định: tính ổn định động lực học như trước đây đã chứng minh đối với hệ mặt trời, tính ổn định cấu trúc của hệ khi thay đổi các điều kiện. Yoccoz nhanh chóng nổi lên như là một trong những người hàng đầu của lý thuyết hệ động lực, khi ông thiết lập một số tiêu chuẩn để cho giới hạn chính xác mà trong đó các định lý ổn định còn có hiệu lực. Yoccoz đã kết hợp những công cụ tính toán mạnh mẽ của giải tích với tổ hợp để đi đến các kết quả đó. Khi nhận xét về các phương pháp của Yoccoz, Adrien Douady, một chuyên gia hàng đầu về hệ động lực, cho rằng Yoccoz kết hợp các ý tưởng khác nhau một cách tài tình như vậy vì ông rất giỏi đánh cờ vua! Theo xếp hạng của Liên đoàn cờ vua quốc tế FIDE thì vào tháng 5 năm 2005, hệ số elo của Yoccoz là 2165, và ông đứng hàng thứ 628 của nước Pháp! (Tất nhiên ông là người đánh cờ rất giỏi, nhưng thứ hạng trong làng cờ dù sao vẫn thấp hơn trong toán học!).



Jean-Christophe Yoccoz sinh ngày 29 tháng 5 năm 1957 tại Pháp. Sau khi tốt nghiệp trường Lycée Louis Le Grand nổi tiếng của Paris, ông thi đỗ đầu vào hai trường đại học nổi tiếng nhất của nước Pháp: Ecole Normale Supérieure và Ecole Polytechnique. Ông theo học ở Ecole Normale, và năm 1977 lại đỗ đầu kỳ thi Thạc sĩ. Trong thời gian thực hiện nghĩa vụ quân sự, ông làm việc tại Braxin (từ 1981 đến 1983), và đến năm 1985 ông hoàn thành luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của giáo sư Herman ở trường đại học Paris 11 (Orsay). Ông nhanh chóng nhận được ghế Giáo sư của đại học Paris 11, và làm việc ở đó đến bây giờ.

Năm 2004, Yoccoz được bầu là Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Pháp và Viện hàn lâm khoa học thế giới thứ ba.

EFIM ISAAKOVICH ZELMANOV

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1994



Efim Zelmanov nhận được Giải thưởng Fields năm 1994 nhờ lời giải *Bài toán Burnside hạn chế*. Đó là bài toán thu hút sự quan tâm của các nhà đại số trên toàn thế giới trong suốt thế kỷ 20.

Năm 1902 W. Burnside viết : "*Có một điểm chưa rõ ràng trong lý thuyết các nhóm rời rạc là, phải chăng cấp (số phần tử) của một nhóm có thể không hữu hạn, trong khi cấp của bất kỳ phần tử nào của nó cũng hữu hạn*". Nói cách khác, một nhóm sinh hữu hạn có thể có vô hạn phần tử hay không, nếu mỗi phần tử của nó đều có cấp hữu hạn? (Ta nhắc lại rằng, một phần tử của nhóm được gọi là có cấp hữu hạn nếu lũy thừa bậc hữu hạn nào đó của nó là phần tử đơn vị). Chính Burnside chỉ ra rằng, điều nói trên là đúng đối với nhóm tuyến tính. Năm 1964, hai nhà toán học Nga là Golod và Shafarevich cho câu trả lời phủ định của bài toán Burnside tổng quát, bằng cách chỉ ra sự tồn tại các nhóm mà đối với chúng kết luận của bài toán không đúng. Về sau, các nhà toán học Nga khác như Alyoshin, Suschansky, Grigorchuk cũng phát hiện thêm nhiều phản ví dụ nữa. Người ta "làm yếu" bài toán, với hy vọng nó có câu trả lời khẳng định, theo cách sau đây: *Giả sử G là một nhóm có hữu hạn phần tử sinh, và giả sử tồn tại số nguyên dương N sao cho mọi phần tử g của G có tính chất $g^N = 1$ (tức là cấp của mọi phần tử của nhóm được chặn trên bởi một số cố định). Phải chăng khi đó G chỉ gồm hữu hạn phần tử?* Câu hỏi đó được gọi là Bài toán Burnside (cũng có khi gọi là Bài toán Burnside bình thường). Năm 1968, hai nhà toán học Nga là Adian và Nôvikôv cho một phản ví dụ của Bài toán Burnside (bình thường).

Bài toán Burnside hạn chế được Magnus phát biểu như sau: *Ta gọi số N nhỏ nhất có tính chất như trong phát biểu của bài toán Burnside là số mũ của nhóm G . Khi đó, phải chăng với mọi cặp số nguyên dương k, N , chỉ tồn tại một số hữu hạn nhóm với hữu hạn phần tử, có k phần tử sinh và có số mũ N ?*

Nhờ những kết quả của Hall và Higman, cùng với việc giải quyết bài toán phân lớp các nhóm đơn hữu hạn (bài toán mang lại Giải thưởng Fields cho Thompson), để giải quyết bài toán Burnside hạn chế, chỉ cần xét nó trong trường hợp số N là lũy thừa của một số nguyên tố nào đó. Năm 1991, Efim Zelmanov đã cho câu trả lời khẳng định cho bài toán Burnside hạn chế trong trường hợp đó, và nhờ kết quả này, ông được tặng Giải thưởng Fields năm 1994. Để đi đến kết quả của mình, Zelmanov đã đơn giản hoá đáng kể cách chứng minh của Kostrikin (mà về sau phát hiện là có sai lầm, với sự khắc phục được công bố rất lâu sau công trình đầu

tiên) cho trường hợp N là số nguyên tố, và phát triển phương pháp đó cho trường hợp lũy thừa tùy ý của số nguyên tố. Người ta cho rằng, Zelmanov đúng là người thích hợp nhất cho việc giải quyết trọn vẹn bài toán Burnside hạn chế, bởi vì trước đó, ông chính là người đã có những kết quả mang tính đột phá trong lĩnh vực đại số Jordan, một công cụ chủ yếu trong việc giải quyết bài toán. Đại số Jordan được đưa ra lần đầu tiên năm 1930 trong công trình của nhà vật lý Jordan nhằm tìm các khía cạnh đại số của cơ học lượng tử. Các nhà đại số đã xây dựng nhiều cấu trúc đẹp đẽ liên quan đến đại số Jordan. Ngay trong luận án tiến sĩ của mình, Zelmanov đã có những kết quả làm thay đổi hoàn toàn diện mạo của lý thuyết đại số Jordan. Đặc biệt, ông đã mở rộng các kết quả của lý thuyết cổ điển các đại số Jordan hữu hạn chiều sang vô hạn chiều. Nhờ công trình này, ông được mời đọc báo cáo tại Đại hội toán học quốc tế năm 1983 ở Ba Lan.



Năm 1987 Zelmanov chứng minh được một trong những câu hỏi lớn nhất của lý thuyết các đại số Lie nói rằng đồng nhất thức Engel suy ra tính chất lũy linh của đại số Lie hữu hạn chiều. Hơn nữa, ông chỉ ra rằng điều đó cũng đúng đối với các đại số Lie vô hạn chiều.

Các kết quả về đại số Jordan và đại số Lie nói trên đã đưa Zelmanov lên hàng những nhà đại số giỏi nhất thế giới. Vì thế việc ông giải được Bài toán Burnside hạn chế năm 1991 và nhận giải thưởng Fields năm 1994 không làm ai ngạc nhiên.

Efim Zelmanov sinh ngày 27 tháng 5 năm 1955 tại Khabarovsk thuộc vùng đông Xibêri của nước Nga. Ông tốt nghiệp trường đại học Novosibirsk

(thủ phủ vùng Xibêri) năm 1977 và được giữ lại làm giảng viên. Năm 1980 ông bảo vệ luận án tiến sĩ về các đại số Jordan tại Novosibirsk, dưới dự hướng dẫn của Shirshov và Bokut. Sau khi bảo vệ luận án tiến sĩ, ông chuyển sang làm nghiên cứu viên của Viện toán học Novosibirsk thuộc Viện hàn lâm khoa học Liên Xô.

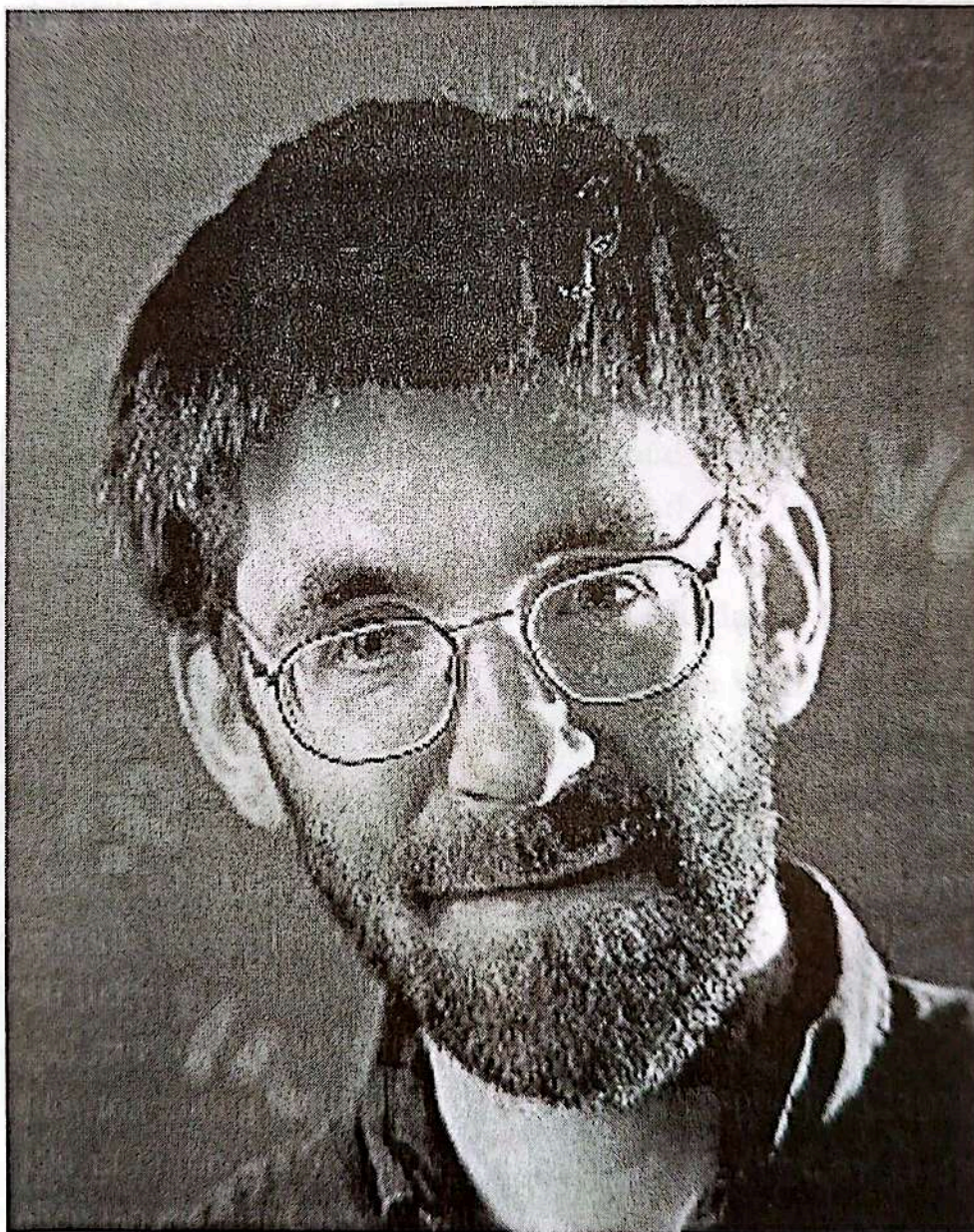
Sau khi bảo vệ luận án tiến sĩ khoa học năm 1985, ông được phong là nghiên cứu viên chính của Viện, và một năm sau đó, năm 1986, trở thành nghiên cứu viên cao cấp.

Năm 1987, Zelmanov rời Liên Xô sang Mỹ. Ông nhận ghế giáo sư tại đại học Wisconsin–Madison từ năm 1990 đến năm 1994, rồi chuyển đến đại học Chicago.

Ngoài Giải thưởng Fields, Zelmanov còn nhận được nhiều giải thưởng cao quý khác: Huy chương của Collège de France (Pháp, 1992); Giải thưởng Andre Aizenstadt năm 1996. Ông được bầu vào Viện hàn lâm quốc gia Mỹ năm 2001.

RICHARD E. BORCHERDS

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1998



Richard Borcherds được trao Giải thưởng Fields nhờ lời giải “*Giả thuyết ánh trăng*” về mối liên quan giữa “nhóm quý” với các dạng môđula. Có lẽ đó là một trong những mối liên hệ kỳ lạ nhất, mặc dù chúng ta đã quen nhìn thấy quan hệ mật thiết của nhiều ngành toán học mà thoát nhìn rất xa nhau.

Người ta nói đùa rằng, công trình của Borcherds khó đến nỗi ai cũng biết anh ta rất xuất sắc, nhưng không ai hiểu tại sao! Tuy nhiên, chúng ta cũng sẽ cố gắng tìm hiểu ở đây sơ lược về công việc của Borcherds. Vào khoảng những năm 70 của thế kỷ trước, khi bài toán phân lớp các nhóm đơn hữu hạn đã đến hồi hoàn tất, Andrew Ogg, một chuyên gia về lý thuyết các dạng môđula (một chủ đề quan trọng của lý thuyết số và hình học đại số) nhận thấy có một sự trùng hợp lạ lùng, có vẻ là ngẫu nhiên, giữa hai lĩnh vực của toán học là lý thuyết các dạng môđula và lý thuyết nhóm đơn hữu hạn. Đó là : *tồn tại 15 số nguyên tố p mà với nó khi chuẩn hoá các nhóm con đồng dư môđulô p của nhóm tuyến tính $SL(2, R)$ ta được tính chất “giống bằng 0”, tức là compact hoá của nửa mặt phẳng trên môđulô nhóm con chuẩn hoá đó là một diện Riemann có giống bằng 0.* Điều kỳ lạ là 15 số nguyên tố đó đúng là 15 ước nguyên tố của cấp (số phần tử) của “nhóm quý” M . Nếu vấn đề chỉ dừng lại ở đó thì có thể chỉ là hiện tượng trùng hợp ngẫu nhiên, nhưng khi đi sâu hơn, ta còn thấy sự trùng nhau của nhiều con số khác xuất hiện trong hai lĩnh vực. Tuy nhiên, để có thể mô tả điều đó, trước tiên cần nói đôi lời về “nhóm quý”.

Trong bài viết về Thompson, chúng ta đã đề cập đến vấn đề phân loại các nhóm con đơn hữu hạn. Mỗi nhóm con đơn hữu hạn được xếp vào một trong 20 họ, mỗi họ gồm vô hạn phần tử, ngoài ra còn có 26 nhóm không xếp được vào họ nào. Người ta gọi đó là các nhóm sporadic (rải rác). Nhóm sporadic đầu tiên được Mathieu xây dựng vào thế kỷ 18, nhưng phải mất đến 100 năm sau, người ta mới tìm thêm được các nhóm sporadic khác. “Nhóm quý” là nhóm sporadic có số phần tử lớn nhất, số đó bằng

808017424794512875886459904961710757005754368000000000

$= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.

Có thể thấy rằng, số phần tử của nhóm là vào khoảng 10^{54} , nhiều hơn số hạt cát trong vũ trụ! Mười lăm số nguyên tố mà Ogg đã nhận xét chính là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71. Ogg treo giải thưởng một cốc uytiski mác Jack Daniels cho ai giải thích được sự trùng lặp mà ông đã nêu ra!

Lý thuyết các dạng môđula là một trong những lý thuyết sâu sắc nhất của số học (đóng vai trò quyết định trong chứng minh định lý cuối cùng của Fermat). Nói một cách ngắn gọn, dạng môđula là một hàm phân hình trong nửa mặt phẳng trên, làm cho một dạng vi phân “có trọng số” bất biến dưới tác động của nhóm con đồng dư nào đó của nhóm tuyến tính $SL(2, \mathbb{Z})$. Sau nhận xét của Ogg, John McKay, Thompson và một số người khác phát hiện ra rằng, có nhiều bất biến bằng số trong biểu diễn của nhóm quỹ trùng với các hệ số khai triển của bất biến môđula j (không gian các dạng môđula có thể xem như một trường hàm hữu tỷ sinh bởi j). Từ đó, Conway và Norton đưa ra “giả thuyết ánh trăng” nói rằng, tồn tại một M -môđun phân bậc (M là nhóm quỹ)

$$V = \bigoplus V_m$$

sao cho chiều của V_m đúng bằng hệ số Fourier thứ m của hàm bất biến môđula j . Hơn nữa ta có cách tương ứng mỗi phân tử của nhóm quỹ với một hàm môđula chuẩn hoá.

Tên gọi “ánh trăng” có lẽ xuất phát từ chỗ giả thuyết trên quá huyền ảo: Nó dựa trên sự quan sát một hiện tượng thoát nhìn có vẻ ngẫu nhiên.

Cấu trúc V nói trên lại được các nhà vật lý tìm thấy khi xây dựng mô hình của giây boson 26 chiều compact hoá trên quỹ đạo xuyên 24 chiều. Nhóm quỹ trở thành nhóm đối xứng của một lý thuyết vật lý.

Để giải giả thuyết ánh trăng, Borcherds đã xây dựng đại số các “toán tử đỉnh” (thuật ngữ “toán tử đỉnh” bắt nguồn từ lý thuyết giây, khi các toán tử được dùng để mô tả các tương tác tại đỉnh), đại số này tạo ra biểu diễn ánh trăng của nhóm quỹ. Borcherds cũng phát triển lý thuyết các đại số Kac–Moody suy rộng, ngày nay mang tên đại số Borcherds. Trong chứng minh của mình, Borcherds thể hiện một kỹ thuật hoàn hảo và một sự độc đáo tuyệt vời. Công trình của Borcherds là sự kết hợp giữa toán học và vật lý, chỉ ra sự hội tụ đáng ngạc nhiên của các ý tưởng từ lý thuyết nhóm hữu hạn đến dạng môđula, nhóm Lie và lý thuyết trường lượng tử bảo giác.

Mặc dù giả thuyết ánh trăng đã được Borcherds chứng minh, người ta cho rằng những bí ẩn sâu sắc nhất của “ánh trăng” vẫn còn chưa được làm sáng tỏ.

Borcherds sinh ngày 29 tháng 11 năm 1959 ở Cape Town, Nam Phi. Ông học đại học ở Cambridge dưới sự hướng dẫn của Conway. Sau khi nhận bằng tiến sĩ, ông làm việc nhiều năm ở Cambridge và đại học California ở Berkeley. Ông được bầu

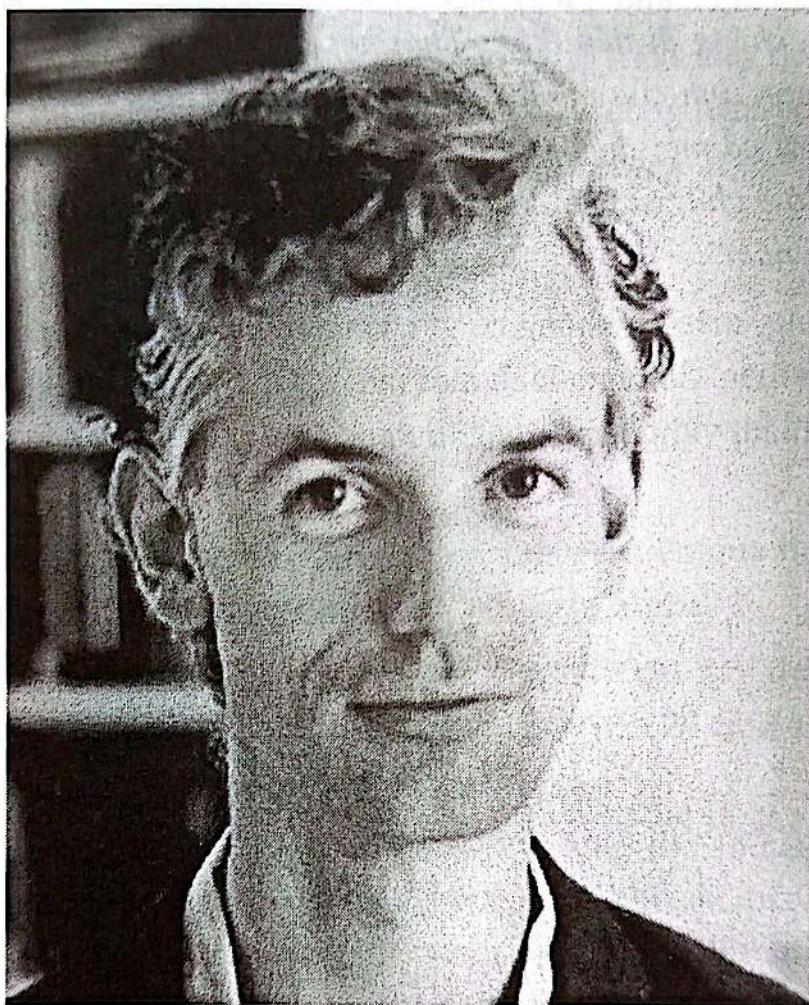
là Viện sĩ Hoàng gia Anh, và từ năm 1996 là “giáo sư nghiên cứu của Viện hoàng gia” tại khoa Toán thuần túy và thống kê toán học của đại học Cambridge.

Borcherds kể về một khoảnh khắc quyết định trong đời nghiên cứu của mình: *“Khi đó tôi đang ở Kashmir. Chúng tôi đi dọc theo miền bắc Ấn Độ, và đó là một hành trình dài và mệt mỏi bằng xe buýt, mất khoảng 24 giờ. Khi đó xe dừng lại vì đường bị đất lở, không đi tiếp được. Thật hết sức bức mình. Dù vậy, tôi vẫn đùa nghịch với các con tính của mình suốt dọc đường, và cuối cùng, tôi tìm ra một ý tưởng làm cho tất cả mọi điều đều trở nên sáng rõ. Điều đó cũng gần giống như khi ta chơi trò đổ ô chữ, và phát hiện ra rằng, lẽ ra có thể chỉ mất mười phút thì ta mất những mười năm”*.

Người ta nói rằng, mặc dù không có gì của toán học mà xa lạ với Borcherds, ông lại có vẻ rất khó hiểu vì hơi xa lánh mọi người. Ông thấy con người quá phức tạp, bí hiểm và khó hiểu, vì họ hành động thường không tuân theo các quy luật của vật lý và toán học!

WILLIAM TIMOTHY GOWERS

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1998



Có nhiều người phân biệt "toán học liên tục" và "toán học rời rạc". Nói một cách nôm na, "toán học rời rạc" là toán học mà trong đó thường người ta làm việc với những tập hợp gồm hữu hạn đối tượng, hoặc vô hạn đối tượng, nhưng "rời rạc", chẳng hạn như tập hợp các số nguyên. Nói đến toán học rời rạc, người ta nghĩ ngay đến lý thuyết tổ hợp, đồ thị hữu hạn, automat, logic, và là lĩnh vực mà trong đó ít dùng đến các công cụ của tôpô, giới hạn. Cho đến những thập kỷ gần đây, ít ai nghĩ rằng, toán học rời rạc lại có thể đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu giải tích hàm, một điển hình của "toán học liên tục", trong đó các khái niệm giới hạn, tôpô, liên tục luôn là các khái niệm chủ đạo.

William Timothy Gowers đã có những đóng góp quan trọng vào giải tích hàm, tổ hợp và lý thuyết số. Ông đã thúc đẩy mạnh mẽ việc dùng các phương pháp của lý thuyết tổ hợp để giải quyết nhiều bài toán khó còn tồn đọng của giải tích hàm. Hai lĩnh vực này có vẻ như hơi xa nhau, và thành tựu đáng ghi nhận nhất của Gowers chính là kết hợp chúng lại một cách rất hiệu quả.

Trong giải tích hàm, Gowers đã giải quyết nhiều bài toán quan trọng và nổi tiếng bậc nhất, phần lớn đã được chính Banach phát biểu ngay từ đầu những năm 1930. Những kết quả của ông đã làm thay đổi hoàn toàn lý thuyết các không gian Banach.

Trong lý thuyết tổ hợp, Gowers đã có những đóng góp cơ bản vào việc nghiên cứu tính ngẫu nhiên. Trong số học, ông giải quyết nhiều vấn đề khó khăn liên quan đến việc tìm những cấp số cộng trong dãy nào đó các số nguyên.

Có thể nói, giữa giải tích hàm và giải tích tổ hợp có một điểm chung là có rất nhiều bài toán tương đối dễ phát biểu, nhưng giải được nó lại vô cùng khó khăn. Ví dụ điển hình là Bài toán 4 màu trong tổ hợp, hoặc bài toán về cơ sở trong không gian Banach. Gowers là người đã thành công trong việc sử dụng những cấu trúc toán học phức tạp để chứng minh một số giả thuyết của nhà toán học người Ba Lan Stefan Banach (1892–1945), kể cả giả thuyết về "các cơ sở không điều kiện". Banach, người sáng lập ra giải tích hàm hiện đại, để lại khá nhiều bài toán khó cùng những giai thoại đặc biệt. Người ta nói rằng, thời gian ông ngồi trong quán cà phê nhiều hơn hẳn trong phòng làm việc của ông ở Trường đại học Lvov (ngày nay thuộc Ucraina). Khi làm việc trong quán cà phê, ông thường đặt ra rất nhiều bài toán, giả thuyết cho giải tích hàm, và ghi chúng vào một cuốn vở đặt tại quán Scottish Café. Ngày nay, cuốn sách đó nổi tiếng với tên gọi "Skottish book".

Trong các bài toán lớn mà Banach để lại, có bài toán về sự tồn tại các dãy cơ sở không điều kiện, mà nói một cách nôm na, chúng làm thành cơ sở không điều kiện của bao đóng tuyến tính của chúng. Tính chất "không điều kiện" liên quan đến sự hội tụ không điều kiện của chuỗi vô hạn, tức là sự hội tụ không phụ thuộc thứ tự các phần tử. Như vậy trong trường hợp này, không gian con sinh ra bởi dãy phần tử đó có tính chất đối xứng đẹp đẽ (vì sự biểu diễn của mỗi phần tử thuộc không gian sẽ không phụ thuộc thứ tự các "tọa độ" thành phần). Điều này hết sức quan trọng trong những ứng dụng của giải tích hàm vào vật lý. Mùa hè năm 1991, Gowers và Maurey đã cùng xây dựng một cách độc lập các không gian mà trong đó không tồn tại các dãy cơ sở không điều kiện. Với kết quả trên, ta có thể xây dựng những không gian Banach mà hầu như không có tính đối xứng. Điều này dẫn đến các phản ví dụ cho nhiều giả thuyết trong giải tích hàm.

Sử dụng cấu trúc nói trên, Gowers giải quyết bài toán siêu phẳng của Banach. Cụ thể là, ông đã xây dựng một không gian có dãy cơ sở không điều kiện, nhưng không đẳng cấu với bất kỳ siêu phẳng nào, thậm chí với bất kỳ không gian con thực sự nào của nó. Điều bất ngờ là Gowers đã đưa bài toán không gian Banach về một bài toán của lý thuyết trò chơi với hai đối thủ, và giải quyết vấn đề với những phương pháp của tổ hợp lý thuyết. Công trình của ông là điểm khởi đầu cho nhiều nghiên cứu mới trong lý thuyết các không gian Banach, chẳng hạn trong vấn đề phân loại các không gian Banach tối thiểu (không gian Banach tối thiểu là không gian có thể nhúng được vào mọi không gian con vô hạn chiều của nó). Gowers cũng cho câu trả lời phủ định cho giả thuyết của Schroder-Bernstein nói rằng hai không gian Banach sẽ đẳng cấu nếu chúng là các không gian con bù của nhau. Một câu hỏi nữa của Banach cũng đã được Gowers trả lời, đó là: Ngoài không gian l_2 , có tồn tại không gian thuần nhất nào nữa không? (Không gian thuần nhất là không gian đẳng cấu với mọi không gian con vô hạn chiều của nó). Gowers chỉ ra rằng, l_2 là không gian thuần nhất duy nhất.

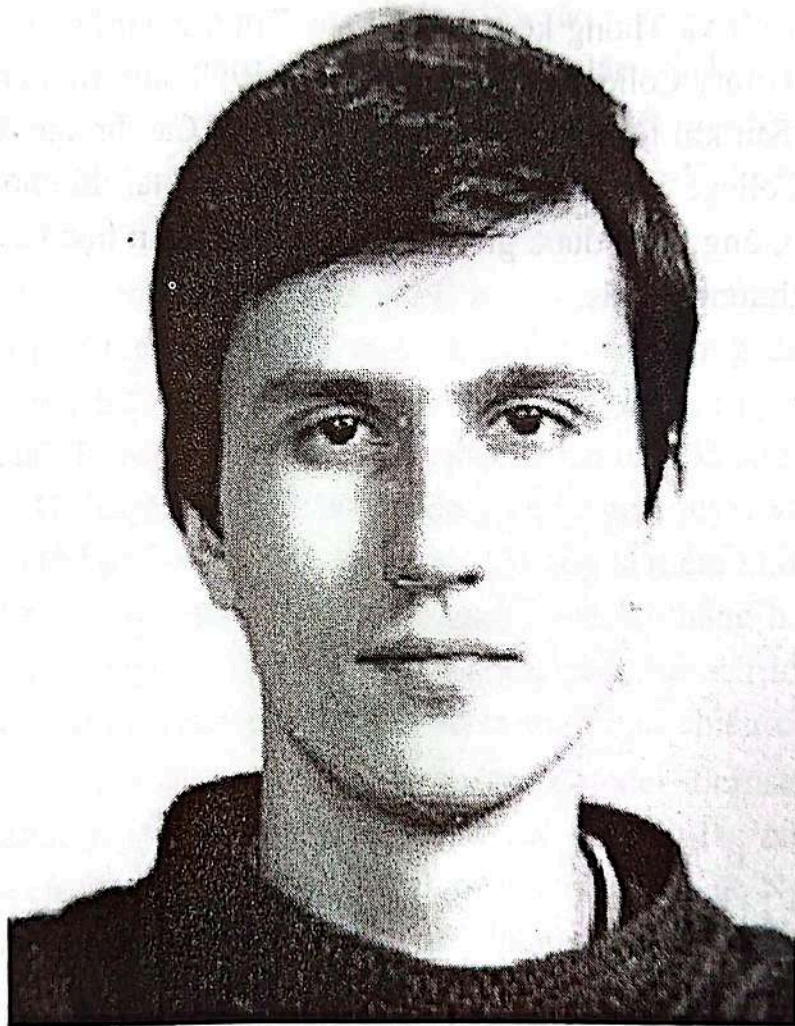
Gowers cũng đã dùng nhiều phương pháp của tổ hợp để giải quyết các vấn đề của lý thuyết số. Năm 1936, Erdos và Turan giả thuyết rằng: cho số nguyên dương k và số $\alpha > 0$ tùy ý, tồn tại số nguyên N sao cho mỗi tập con tùy ý của $\{1, 2, \dots, N\}$, nếu có ít nhất αN số, sẽ chứa cấp số cộng gồm k số hạng. Năm 1953, Roth (Giải thưởng Fields 1956) chứng minh giả thuyết trên cho trường hợp $k=3$. Năm 1975, Szemerédi đã chứng minh được giả thuyết trên. Tuy nhiên, vấn đề đặt ra là ước lượng số N nói trong giả thuyết. Gowers đã dùng những cách tiếp cận hoàn toàn

mới để cho một cận trên của số N (phụ thuộc k và α). Người ta hy vọng rằng, với phương pháp của Gowers, có thể cho được ước lượng chính xác. Hơn nữa, có cơ sở để hy vọng rằng, phương pháp của Gowers có thể dẫn đến việc giải quyết một giả thuyết khác của Erdos nói rằng: *một dãy số tự nhiên mà có tổng các nghịch đảo là chuỗi phân kỳ thì sẽ chứa cấp số cộng độ dài tùy ý. Chẳng hạn từ đó suy ra rằng, tồn tại các cấp số cộng độ dài tùy ý, mà mọi số hạng của nó đều là số nguyên tố.*

William Timothy Gowers sinh ngày 20 tháng 11 năm 1963. Ông là giảng viên khoa Toán lý thuyết và Thống kê toán học của Trường đại học Cambridge và là thành viên của Trinity College. Từ tháng 10 năm 1998 ông trở thành giáo sư toán học của trường. Sau khi tốt nghiệp nghiên cứu sinh ở Cambridge, Gowers chuyển đến University College London năm 1991, và làm việc tại đó cho đến cuối năm 1995. Năm 1996, ông nhận được giải thưởng của Hội toán học Châu Âu, và năm 1998 được Giải thưởng Fields.

MAXIM KONTSEVICH

GIẢI THƯỜNG FIELDS 1998



Maxim Kontsevich sinh ngày 25 tháng 8 năm 1964 ở Khimki, Nga, cha là chuyên gia về lịch sử Triều Tiên, mẹ là kỹ sư cơ khí. Năm 1980, ở tuổi 16, anh bước vào trường đại học tổng hợp Matxcova mang tên Lômônôxốp, một trong những trường đại học hàng đầu thế giới. Mỗi năm trường tuyển khoảng 400 sinh viên cho khoa toán, và hàng tuần có hơn 100 xêmina về toán hoạt động thường xuyên, đủ đáp ứng cho bất kỳ sự say mê nào của sinh viên! Maxim nói rằng : *“Đó là một nơi thật kỳ diệu . Tôi không gặp ở bất kỳ nơi đâu sự tập trung các nhà toán học đến như vậy”*. Hấp dẫn nhất đối với anh thanh niên Maxim là các xêmina của Ghelfald và Manin. Như thường lệ, xêmina Manin làm vào thứ 5 hàng tuần, từ 4 giờ đến 6 giờ chiều, còn xêmina Ghelfand cùng ngày đó, nhưng từ 7 đến 9 giờ tối! Những ai đã từng theo các xêmina đó ở trường đại học tổng hợp Matxcova đều không khỏi ngạc nhiên khi thấy người ta đi theo xêmina đông đến vậy, mặc cho nó tổ chức vào các giờ khá oái oăm, và nhiều khi tan xêmina phải ra về trong cái rét cắt thịt của Matxcova, đôi lúc đến 30–40 độ âm.

Cũng giống như nhiều nhà toán học Liên Xô gốc Do Thái, sau khi tốt nghiệp trường đại học tổng hợp Lômônôxốp, Maxim Kontsevich vào làm việc tại Viện các vấn đề truyền tin ở Matxcova, nơi mà anh cho rằng có một môi trường làm việc hoàn toàn tự do. Kontsevich làm việc 5 năm ở đó, nơi anh giành một nửa thời gian cho toán học, nửa còn lại cho nhạc cổ điển. Kontsevich chơi violôn và thổi sáo không tồi! Anh cũng tham gia lớp học tiếng Pháp, và nhờ vậy, gặp người bạn đời tương lai của mình, Katerina Rosanova, một cô gái Nga hiền lành và vui tính.

Năm 1990 Kontsevich được mời đến làm việc tại Viện toán học Max–Planck ở Bonn, CHLB Đức trong 3 tháng. Vào thời gian đó, tôi cũng đang làm việc tại Max–Planck, và may mắn được phân ngồi cùng một phòng với Maxim. Khi đó, anh vẫn chưa có bằng tiến sĩ, vì chưa bao giờ được làm nghiên cứu sinh ở Nga! Mặc dù Maxim đã 30 tuổi, nhưng với nước da trắng và mái tóc đen, trông anh trẻ hơn tuổi, không khác một sinh viên mới ra trường là mấy. Vậy nhưng mọi người trong Viện Max–Planck đều bảo nhau, nếu có gì đó không hiểu thì nên hỏi Maxim, vì anh ta biết tất cả mọi thứ. Một lần bạn tôi, anh Nguyễn Tự Cường, đến chơi và khi ra về bắt tay Maxim. Tôi nói đùa rằng, cậu vừa bắt tay một người được Giải thưởng Fields trong tương lai! Không ngờ 8 năm sau, điều đó đã trở thành sự thật.

Maxim chỉ định đến Viện Max–Planck trong 3 tháng, vậy nhưng anh đã ở lại đó 3 năm. Mọi việc bắt đầu từ báo cáo của Atiyah (Giải thưởng Fields 1964) tại Arbeitstagung (cuộc Hội nghị khoa học hàng năm của Viện Max–Placnk, Bonn)

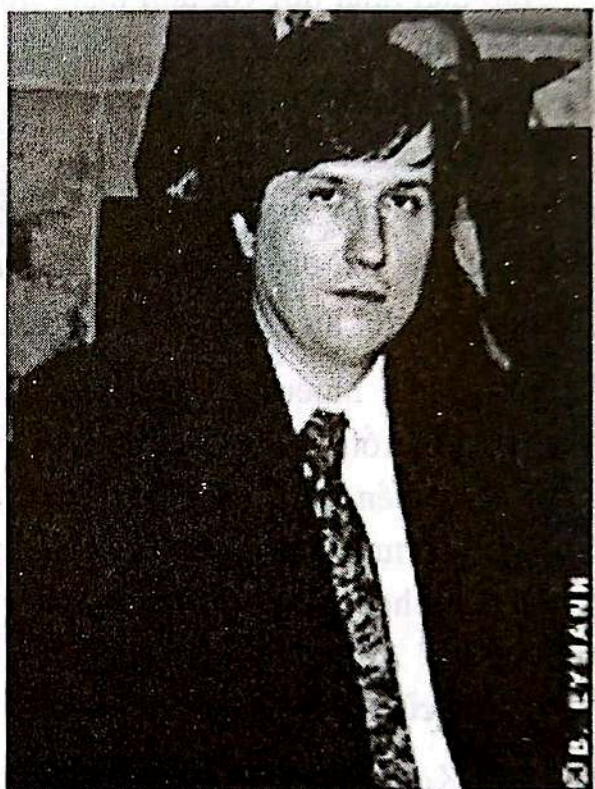
mùa hè năm 1990. Trong báo cáo của mình về hấp dẫn lượng tử, Atiyah nhắc đến một giả thuyết quan trọng của Witten. Tối hôm đó, Maxim bỏ buổi liên hoan của Viện để nghĩ về giả thuyết, và ngay sáng hôm sau, anh trình bày lược đồ chứng minh giả thuyết Witten! Việc đó gây ấn tượng mạnh với Hirzebruch, viện trưởng của Viện Max-Planck, và ông đã mời Kontsevich ở lại Viện thêm 3 năm nữa. Không những thế, Hirzebruch đã tổ chức để Kontsevich bảo vệ luận án và nhận bằng tiến sĩ tại đại học Bonn.

Sau những công trình gây tiếng vang lớn trong giới toán học và vật lý, Maxim Kontsevich nhận được cùng một lúc ba lời đề nghị làm việc, đều của những nơi nổi tiếng nhất thế giới: trường đại học California, đại học Princeton và Viện nghiên cứu cao cấp (IHES) ở Bures-sur-Yvette (Pháp). Kontsevich giữ chức giáo sư tại đại học California từ tháng 7 năm 1993 đến tháng 8 năm 1995, và trở thành Giáo sư của IHES từ tháng 9 năm 1996, ở độ tuổi 31.

Maxim Kontsevich có mối quan tâm đặc biệt rộng lớn: Các công trình của

Kontsevich thuộc vào nhiều lĩnh vực của toán học như đại số, hình học, giải tích, tôpô, tổ hợp; và nhiều vấn đề của vật lý hiện đại như lý thuyết trường lượng tử và lý thuyết dây.

Lý thuyết trường lượng tử cho phép áp dụng lý thuyết lượng tử vào việc nghiên cứu tương tác giữa các hạt cơ bản, giúp chúng ta hiểu biết về tương tác giữa các hạt electron và photon. Một trong những vấn đề chính chưa được giải quyết của vật lý là chúng ta chưa có được một lý thuyết kiểu như vậy nhưng áp dụng được cho cả trường hấp dẫn. Người ta đã đề xuất và nghiên cứu những mô hình đầu tiên của hấp dẫn lượng tử. Một trong những đóng góp chính của Kontsevich là chứng minh sự tương đương của hai trong số các mô hình đó.



Lý thuyết dây cho đến nay được xem là một lý thuyết có vẻ thích hợp nhất cho việc mô tả lượng tử thống nhất của lực hấp dẫn và các lực cơ bản khác. Kontsevich đã chứng minh giả thuyết của Witten về một khía cạnh toán học của lý thuyết dây, một kết quả nhận được sự quan tâm rộng rãi của các nhà toán học và vật lý. Giả thuyết Witten nói rằng một chuỗi hình thức mà hệ số là các số giao của không gian moduli các đường cong phức thoả mãn phương trình đạo hàm riêng kiểu Kortevég–de Vries. Trong chứng minh của mình, Kontsevich đã sử dụng nhiều ý tưởng của vật lý, đặc biệt là các hàm ma trận Airy. Ngày nay, phương pháp của ông nổi tiếng dưới tên gọi các mô hình Kontsevich.

Kontsevich đã cùng với Manin dùng các nguyên lý của tích phân Feynman trong vật lý và các tiến bộ của tôpô trong những năm 80 để làm nên một cuộc cách mạng trong một lĩnh vực mới là "hình học đại số đánh số". Trong các kết quả của họ, nổi bật nhất là việc giải quyết vấn đề lượng hoá, đóng vai trò quan trọng là chiếc cầu nối giữa cơ học lượng tử và cơ học cổ điển. Sử dụng khái niệm ánh xạ ổn định của các đường cong phức để tính số các đường cong hữu tỷ, đường cong đại số trên đa tạp xạ ảnh phức, Kontsevich phát biểu (cùng với Manin) *Giả thuyết gương* về các đa tạp Calabi–Yau 3 chiều. Giả thuyết gương bao gồm một loạt các dự đoán về những mối liên quan trong hình học phức, được gợi ý từ những giả thuyết về đối ngẫu trong lý thuyết dây lượng tử.

Kontsevich có những đóng góp cơ bản trong lý thuyết nút (xem phần viết về Witten và Jones). Đặc biệt, ông đã đưa ra những bất biến mới của nút, đồng thời xây dựng các bất biến phổ dụng cho nút trong không gian 3 chiều, đưa ra khái niệm đối đồng điều đồ thị, nhờ đó mô tả đầy đủ các khía cạnh đại số của bất biến, và cũng làm đơn giản hoá các khía cạnh giải tích.

Một trong những kết quả nổi tiếng khác của Kontsevich là chứng minh rằng mọi cấu trúc Poisson đều có thể lượng tử hoá hình thức với việc cho công thức lượng tử hoá dưới dạng hiện.

Maxim Kontsevich được tặng giải thưởng của Toà thị chính Paris (1992); Huy chương Otto Hahn của Max–Planck–Gesellschaft (CHLB Đức, 1992); Giải thưởng Iagolnitzer của Hội vật lý toán quốc tế (1997); được mời đọc báo cáo toàn thể tại Đại hội vật lý toán quốc tế lần thứ 11 (Paris, 1994), Đại hội toán học quốc tế tại Zurich 1994; được tặng Giải thưởng Fields năm 1998. Kontsevich được bầu Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Pháp năm 2002.

Maxim Kontsevich từng nói : *“Với tôi, Toán học là một vũ trụ độc lập và tuyệt vời”*.

CURTIS T. MCMULLEN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 1998



Curtis McMullen được trao Giải thưởng Fields năm 1998 nhờ những đóng góp trong lý thuyết hệ động lực, lý thuyết tính toán, giải tích phức nhiều biến, hình học các đa tạp ba chiều và một số lĩnh vực khác của toán học. Tuy nhiên, McMullen nói rằng, tất cả những điều ông làm đều không có gì xa nhau, và việc giải quyết vấn đề này dẫn đến vấn đề khác một cách hoàn toàn tự nhiên.

Curtis McMullen sinh ngày 21 tháng 5 năm 1958 ở Berkeley, bang California và lớn lên ở Vermont. Ông tốt nghiệp trường Williams College năm 1980 ở Western Massachusetts, sau đó học thêm một năm ở Cambridge, nước Anh, và vào nghiên cứu sinh tại đại học Harvard năm 1982.

Trước khi vào nghiên cứu sinh ở Harvard, McMullen đã làm việc với David Mumford (Giải thưởng Fields 1974) về việc tính toán trên các nhóm Klein. Ông rất yêu thích đề tài này, nhưng sau đó Mumford giới thiệu để McMullen làm việc và kết thúc luận án của mình năm 1985 với một thầy giáo khác, Denis Sullivan, giáo sư của Đại học New York, đồng thời là giáo sư của Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES), Pháp. Khi đến làm việc với Sullivan ở IHES, McMullen may mắn gặp Smale (Giải thưởng Fields 1966) đang ở đó, và Smale đã gợi ý cho ông một đề tài luận án rất hay là giải các phương trình đa thức bằng phép lặp. Việc tìm nghiệm các phương trình đa thức là vấn đề trung tâm trong lịch sử toán học. Ngay từ thời cổ Hy Lạp, các nhà toán học đã giải phương trình bậc hai $x^2 = 2$ nhờ phương pháp xấp xỉ, mà ngày nay ta gọi là phương pháp Newton. Việc tìm nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ đã dẫn đến sự ra đời của số phức. Cũng chính những cố gắng tìm hiểu xem phương trình đa thức nào giải được bằng căn thức đã đưa đến khái niệm nhóm, một khái niệm quan trọng bậc nhất của toán học. Ta biết rằng, phương pháp Newton, mặc dù rất hữu hiệu khi giải các phương trình bậc 2, lại có thể không dùng được khi ta giải các phương trình bậc 3 (vì có thể bị “mắc kẹt” tại một cực tiểu địa phương). Hơn nữa, nếu ta thay đổi một ít giá trị ban đầu, quá trình có thể không hội tụ đến nghiệm. Như vậy, phương pháp Newton không hiệu quả khi giải các phương trình đa thức bậc lớn hơn 2. Vấn đề đặt ra là tồn tại hay không một thuật toán giống như phương pháp Newton, dùng phép lặp một hàm hữu tỷ (thương của hai đa thức) để giải phương trình đa thức. McMullen chứng minh rằng, không tồn tại một thuật toán như vậy đối với các đa thức bậc từ 4 trở lên, đồng thời ông đưa ra một thuật toán hữu hiệu, tương tự thuật toán Newton, để giải các phương trình bậc 3.

Về sau, McMullen cùng với Peter Doyle tìm ra một thuật toán bất ngờ và đẹp để giải các phương trình đa thức bậc 5. Điều này hoàn toàn không mâu thuẫn với kết quả trước đây của McMullen, vì trong thuật toán này, ta không chỉ dùng việc lập một hàm hữu tỷ, mà là lập một "tháp nhiều tầng" các hàm hữu tỷ: Ta lập một hàm hữu tỷ, lấy giá trị mà nó hội tụ đến để làm điểm xuất phát cho việc lập một hàm hữu tỷ khác.

Theo kết quả của Galois, phương trình bậc 5 tổng quát không giải được bằng căn thức. Để giải được phương trình bằng phép lập ánh xạ hữu tỷ, McMullen tìm ánh xạ hữu tỷ mà nhóm đối xứng của nó là nhóm Galois của đa thức. Chỉ có một tập hợp rất nhỏ các nhóm có thể là nhóm đối xứng trên mặt cầu Riemann, và những nhóm đáng quan tâm nhất là các nhóm liên quan đến các vật thể Platon (là các khối đa diện mà mỗi mặt là một đa giác đều; chỉ có các khối với mặt sau đây: tam giác đều, hình vuông, hình 8 cạnh đều, hình 12 cạnh đều, hình 20 cạnh đều). Chẳng hạn A5, nhóm đối xứng của một khối có mặt là hình 12 cạnh đều, là nhóm phức tạp nhất mà ta nhận được. McMullen đã sử dụng nhóm ánh xạ hữu tỷ với nhóm đối xứng A5 để cho thuật toán giải phương trình bậc 5. Với các phương trình bậc cao hơn, không tồn tại phương pháp như vậy, vì chẳng hạn nhóm đối xứng A6 không tác động trên mặt cầu Riemann. Như vậy, vấn đề giải các phương trình đa thức được đưa về một bài toán hình học. Stephen Smale, khi nhận xét kết quả này của McMullen, đã nói một cách ngắn gọn: "*Quá đẹp!*".

Kết quả quan trọng khác của McMullen liên quan đến tô pô các đa tạp ba chiều, nhận được khi ông làm việc ở Princeton. Về chủ đề này, Thurston (Giải thưởng Fields 1982) có một chương trình nghiên cứu rất thành công, được gọi là *tìm hình học chính tắc của đa tạp 3 chiều*. Nói một cách ngắn gọn, nếu ta có một đa tạp 3 chiều, ta có thể tìm một metric (khoảng cách) thích hợp để nhận ra cấu trúc thực sự của nó. Chẳng hạn, sau khi đưa vào một metric thích hợp với một đa tạp 3 chiều nào đó mà ta đang có, rất có thể khi đó ta mới nhận ra rằng, thực chất nó là một mặt cầu 3 chiều, điều mà thoát tiên chưa thể hiện rõ. Thurston phát hiện ra rằng, metric như vậy trên hầu hết các đa tạp 3 chiều không có tính chất "độ cong dương" như trên mặt cầu 3 chiều, mà có "độ cong âm", và ta gọi đó là đa tạp hyperbolic. McMullen đã tìm ra một chứng minh mới, với các công cụ giải tích, của định lý Thurston. Chứng minh của McMullen dẫn đến việc giải quyết một số vấn đề tồn tại trong giải tích phức về các chuỗi Poincaré, giả thuyết Kra và Bers. McMullen nói rằng, ông đã tìm ra một sự "song song" giữa những vấn đề đó với lý thuyết các đa tạp 3 chiều.

Một trong những kết quả góp phần mang lại Giải thưởng Fields cho McMullen là kết quả trong hệ động lực phức một chiều, một lý thuyết nhằm nghiên cứu phép lặp các đa thức một biến phức. Smale cho rằng, đó là phần có kỹ thuật khó nhất trong lý thuyết hệ động lực. Năm 1960, Smale đưa ra giả thuyết rằng, hầu hết các đa thức phức là hyperbolic, tức là các quỹ đạo (qua phép lặp) của các điểm tới hạn của chúng luôn luôn dẫn đến một chu trình. Cho đến tận ngày nay, giả thuyết đó chưa được chứng minh ngay cả với trường hợp các đa thức phức bậc 2. Với trường hợp các đa thức bậc 2, luôn luôn có thể đưa về dạng

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Đa thức này có điểm tới hạn duy nhất là $z = 0$. Tập hợp các điểm c sao cho khi lặp, điểm tới hạn của đa thức không chạy ra vô cùng được gọi là tập hợp Mandelbrot, ngày nay rất nổi tiếng trong toán học. McMullen chứng minh một định lý quan trọng nói rằng, *nếu c nằm trong một thành phần liên thông của tập Mandelbrot có giao với trục thực, thì đa thức tương ứng P_c là hyperbolic*. Trước McMullen, Yoccoz (Giải thưởng Fields 1994) đã chứng minh kết quả trên trong một số trường hợp riêng quan trọng.

McMullen tự nói về các công việc của mình như sau: *"Tôi làm việc với động lực học các ánh xạ hữu tỷ, và tôi làm việc với các đa tạp hyperbolic 3 chiều; tôi làm việc trên mặt cầu Riemann, và cũng làm việc về tôpô của các mặt và nút. Điều tôi muốn nói ở đây là, đối với tôi, tất cả các lĩnh vực đó thực sự chỉ là một. Bạn rất dễ dàng bắt đầu với một bài toán trong hệ động lực, và chỉ ít tháng sau bỗng nhận thấy mình đang nghiên cứu vấn đề của lý thuyết nút hoặc tôpô, bởi vì chúng liên quan rất chặt chẽ với nhau: nút, giải tích phức, đa thức, diện Riemann, đa tạp 3 chiều, v.v.."*

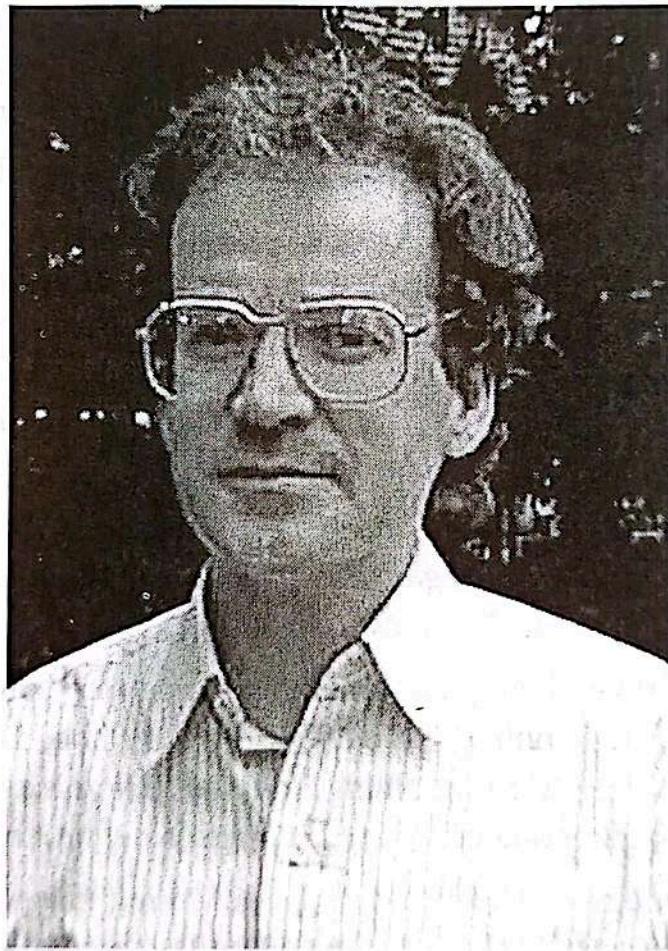
McMullen cũng nói rằng, điều quan trọng nhất mà ông học được ở các giáo sư của mình là cách phát hiện ra những "từ điển" trong toán học: Đó chính là cách làm thế nào sử dụng sự tương tự trong những lĩnh vực khác nhau của toán học, để có thể "phiên dịch" những kết quả của một ngành này sang một ngành khác.

Sau khi nhận học vị tiến sĩ ở Harvard, Curtis McMullen giảng dạy một năm ở Viện công nghệ Massachusetts (MIT), rồi chuyển đến làm việc ở Viện nghiên cứu toán học Berkeley (MSRI) và Viện nghiên cứu cao cấp Princeton (IAS) trong các năm 1986–1987. Từ năm 1987 đến 1997, ông nhận ghế giáo sư ở đại học Princeton, rồi đại học California ở Berkeley. McMullen chuyển đến làm giáo sư của đại học Harvard từ năm 1997 đến nay.

McMullen được trao Giải thưởng Salem năm 1991, Giải thưởng Fields năm 1998, và cùng năm đó được bầu là viện sĩ Viện hàn lâm nghệ thuật và khoa học Mỹ.

LAURENT LAFFORGUE

GIẢI THƯỞNG FIELDS 2002

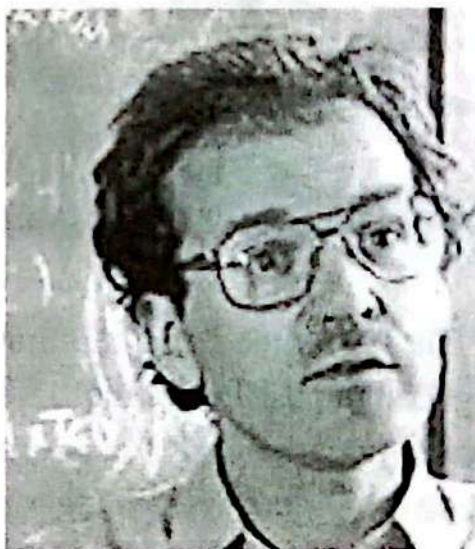


Laurent Lafforgue được tặng Giải thưởng Fields tại Đại hội toán học quốc tế ở Bắc Kinh năm 2002 nhờ đạt được những tiến bộ đáng kể trong *Chương trình Langlands* nổi tiếng.

Có thể nói ngắn gọn, “Chương trình Langlands” là một tập hợp các giả thuyết (phát biểu trong bức thư của Langlands, nhà toán học người Canada, gửi André Weil năm 1967) tiên đoán một mối quan hệ mật thiết giữa nhiều ngành toán học tưởng chừng rất khác nhau. Chính xác hơn, *tương ứng Langlands* có thể phát biểu như sau:

Giả sử F là mở rộng hữu hạn của trường số hữu tỷ, G_F là nhóm Galois của F . Với mọi số nguyên $r \geq 1$, ta nói rằng một biểu diễn l -adic bất khả quy σ chiều r của G_F và một biểu diễn tự đẳng cấu cuspidal π là tương ứng với nhau nếu chúng có cùng một L -hàm. Khi đó tương ứng $\sigma \rightarrow \pi_\sigma$ là một đơn ánh. Khi F là trường hàm thì tương ứng trên là một song ánh.

Tương ứng Langlands có nguồn gốc sâu xa từ một trong những kết quả sâu sắc nhất của số học là *luật thuận nghịch bình phương*, được chứng minh lần đầu tiên bởi Carl Friedrich Gauss năm 1801. Với mỗi số tự nhiên n , luật thuận nghịch bình phương cho ta mô tả tất cả các số nguyên tố p sao cho phương trình đồng dư $x^2 \equiv n \pmod{p}$ có nghiệm. Mặc dù đã có nhiều chứng



minh khác nhau của luật này (chính Gauss đã cho 6 cách khác nhau), đây vẫn là một trong những sự kiện kỳ bí nhất của số học. Việc nghiên cứu mở rộng luật thuận nghịch bình phương trở thành một trong những động lực mạnh mẽ của số học thế kỷ XIX. Năm 1902 Emil Artin đã cho một luật thuận nghịch rất tổng quát. *Chương trình Langlands* chính là một dạng tổng quát nhất của các luật thuận nghịch, nó cho ta một cách nhìn thống nhất giữa Số học và Giải tích, vì các dạng modular, hay rộng hơn, các dạng tự đẳng cấu là một trong những đối tượng quan trọng nhất của Giải tích toán học. Thành công của Andrew Wiles trong việc chứng minh Định lý lớn Fermat là một trong những ví dụ rõ rệt chứng tỏ sự sâu sắc của

Chương trình Langlands (trong chứng minh đó, công cụ chủ yếu được sử dụng là các biểu diễn l -adic ứng với dạng modular).



Lafforgue đang làm toán

Các công trình của Lafforgue đánh dấu một sự tiến bộ đáng kể trong việc chứng minh tương ứng Langlands. Lafforgue đã chứng minh giả thuyết Langlands đối với $GL(r)$ trên các trường hàm. Khi $r = 1$, đó chính là lý thuyết cổ điển của Emil Artin về trường các lớp aben. Khi hạng $r = 2$, và đối với các trường số, những khẳng định quan trọng đầu tiên của giả thuyết chính là chứng minh của Pierre Deligne (Giải thưởng Fields năm 1978) về giả thuyết Ramanujan (đánh giá hệ số chuỗi Ramanujan), và chứng minh của chính Langlands về giả thuyết Artin.

Vào đầu những năm 70, Vladimir Drinfeld (Giải thưởng Fields 1990) tấn công giả thuyết Langlands cho trường hàm. Trước tiên, ông xây dựng các khái niệm tương tự với đường cong môđula (ngày nay nổi tiếng dưới tên gọi môđun Drinfeld), và sử dụng để chứng minh một số trường hợp của giả thuyết Langlands cho trường hợp hạng $r = 2$. Về sau, vì các môđun Drinfeld không cho phép tìm được tất cả các biểu diễn tự đẳng cấu, Drinfeld đưa ra khái niệm "shtuka", và nhờ đó ông chứng minh trọn vẹn giả thuyết trong trường hợp hạng $r = 2$. Mặc dù trường hợp tổng quát của giả thuyết Langlands vẫn chưa được giải quyết, với công trình của Drinfeld, nhiều

khó khăn về kỹ thuật đã được vượt qua, mở ra triển vọng rõ ràng cho việc hoàn tất chương trình Langlands.

Laurent Lafforgue đã đặt một cái mốc cơ bản trong việc giải quyết vấn đề, với việc xây dựng cấu trúc compact hoá một số đa tạp môđun. Chứng minh đồ sộ của ông là kết quả của sáu năm làm việc không biết mệt mỏi.

Laurent Lafforgue sinh ngày 6 tháng 11 năm 1966 ở Antony, ngoại ô Paris.

Tốt nghiệp trường trung học Louis Le Grand nổi tiếng, Lafforgue theo học lớp dự bị để thi vào các "trường lớn" (grands ecoles) của Pháp, sau đó học tại trường Ecole Normale Supérieure từ năm 1986, và nhận chức nghiên cứu viên của Trung tâm nghiên cứu khoa học quốc gia Pháp (CNRS) năm 1990, làm việc trong êkíp "Số học và Hình học đại số" của Trường đại học Nam Paris (Paris 11) ở Orsay. Năm 1994, ông bảo vệ luận án tiến sĩ "*D-chtouka Drinfeld*" dưới sự hướng dẫn của Gérard Laumon. Năm 2000, Lafforgue trở thành Giám đốc nghiên cứu của CNRS, đồng thời nhận chức Giáo sư của Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IHES) ở Bures-sur-Yvette.

Laurent Lafforgue được tặng Huy chương đồng của CNRS năm 1998, Giải thưởng của Viện Clay năm 2000, Giải thưởng Jacques Herbrand của Viện hàn lâm khoa học Pháp năm 2001, được bầu Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Pháp năm 2003.

Lafforgue được mời đọc báo cáo toàn thể tại Đại hội toán học quốc tế năm 1998 tại Berlin, và bốn năm sau, ông nhận được Giải thưởng Fields tại Đại hội ở Bắc Kinh.

Lafforgue cổ vũ mạnh mẽ cho việc dùng tiếng Pháp trong khi công bố các công trình khoa học. Ông cho rằng việc đó cần thiết cho sự phát triển của khoa học Pháp. Bản thân ông luôn tuân thủ nguyên tắc đó: Các công trình của ông đều được viết bằng tiếng Pháp. Thậm chí, tại Đại hội toán học quốc tế ở Bắc Kinh năm 2002, khi trình bày công trình của mình, ông đã chiếu bài nói chuyện lên hai màn hình, một bằng tiếng Pháp và một bằng tiếng Trung Quốc! Lafforgue đề nghị giảng dạy tiếng Pháp, văn học Pháp cổ điển thật cẩn thận trong nhà trường, vì điều đó giúp ích rất nhiều cho sự phát triển sau này của học sinh, cả khi họ sẽ trở thành nhà toán học. Ông đã được học tiếng latin, Hy Lạp từ nhỏ, say mê văn học cổ điển, đặc biệt là Victor Hugo, Honore de Balzac, Lev Tolstoi. Lafforgue nói rằng, khi còn học phổ thông, ông mơ ước trở thành nhà văn, và những hiểu biết về ngôn ngữ đã giúp ông rất nhiều trong nghiên cứu toán học.

Trong một cuộc trả lời phỏng vấn báo Le Figaro ngày 7/12/2004, Lafforgue cho rằng trình độ toán học của học sinh Pháp đang giảm đi một cách đáng lo ngại trong những năm gần đây. Lý do là vì chính sách "giảm tải" môn toán trong chương trình: Người ta để học sinh biết các định lý mà không hiểu chứng minh của chúng, các định nghĩa, khái niệm được trình bày thiếu chính xác hơn trước, và kết quả là học sinh học thuộc công thức, định lý mà không nắm vững được logic nội tại, điều quan trọng hàng đầu trong việc học toán.

Khi trả lời câu hỏi, theo ông thì điều gì quan trọng nhất đối với những sinh viên trẻ có tài, tuổi từ 18 đến 25, nếu họ muốn đạt được những thành tựu lớn trong khoa học, Lafforgue khuyên họ mấy điều. Trước hết, không nên chọn cho mình một lĩnh vực chuyên môn hẹp quá sớm. Họ cần có một kiến thức rộng về các ngành khác nhau trong toán học, thậm chí cả trong vật lý và sinh học, ngay cả khi họ có ý định trở thành nhà toán học. Ông khuyên các bạn trẻ nên nghe các bài giảng của những nhà toán học hàng đầu, đọc các công trình của họ càng sớm càng tốt, ngay cả khi chưa đủ kiến thức để hiểu. Theo ông, 20 không phải là lứa tuổi quá sớm để bắt đầu việc đó.

Trước câu hỏi: "Đâu là khía cạnh đẹp nhất của toán học?", Lafforgue nói: *"Một câu hỏi khó trả lời. Nếu phải nói trong một từ, thì đó có thể là 'sự hài hoà', hoặc là sự thống nhất của tư duy. Bạn cảm thấy rằng những điều mà bạn cho là đẹp để không phải do các nhà toán học tạo ra, mà là do họ phát hiện được. Toán học đẹp để đã tồn tại đâu đó trong vũ trụ (đặc biệt tồn tại đâu đó trong tư duy của bạn), nhưng bị che lấp. Cho đến một ngày, mọi thứ hiện ra trong ánh sáng"*. Lafforgue tin vào sự tồn tại của Chúa. Khi sang thăm Việt Nam năm 2000, hàng ngày ông đến Nhà Thờ rất đều đặn.

VLADIMIR VOEVODSKY

GIẢI THƯỞNG FIELDS 2002



Voevodsky được trao Giải thưởng Fields năm 2002 vì đã phát triển các lý thuyết đồng điều trên các đa tạp đại số, và như nhiều người đánh giá, “dội một ánh sáng mới lên lý thuyết số và hình học đại số”. Thành công của Voevodsky được đánh giá là bước tiến xuất sắc nhất trong hình học đại số của những thập niên gần đây. Công trình của ông nổi bật bởi sự kết hợp những ý tưởng vừa ở mức trừu tượng cao nhất, vừa mềm dẻo và dễ tính toán, đồng thời áp dụng được để giải quyết những vấn đề toán học rất cụ thể. Voevodsky nổi tiếng nhờ những công trình về lý thuyết đồng điều các lược đồ, K -lý thuyết đại số, mối liên quan giữa hình học đại số và tôpô đại số. Ông cũng là người đã “tích hợp” hình học đại số và lý thuyết đồng luân, hai ngành quan trọng của toán học.

Thành tựu của Voevodsky có nguồn gốc từ những công trình của Grothendieck (Giải thưởng Fields 1966), người đã xây dựng những cấu trúc trừu tượng góp phần thống nhất các ngành khác nhau của toán học. Grothendieck giả định rằng, cần phải có những đối tượng, mà ông gọi là các “mô-tiv”, để làm nên cội nguồn của sự thống nhất hai lĩnh vực của toán học là số học và hình học. Những tư tưởng của Grothendieck đã có ảnh hưởng lớn trong toán học, và là động lực lớn cho các công trình của Voevodsky.

Voevodsky đã phát triển một lý thuyết đồng điều mới cho các đa tạp đại số (đa tạp đại số là tập hợp nghiệm của một hệ phương trình đại số nào đó), và mặc dù rất trừu tượng, lý thuyết này được áp dụng để chứng minh một giả thuyết của Milnor tồn tại 30 năm nay. Khái niệm đối đồng điều xuất hiện lần đầu tiên trong tôpô. Mục tiêu chính của tôpô là nghiên cứu các tính chất cơ bản của các vật thể, không thay đổi khi biến dạng liên tục chúng. Lý thuyết đối đồng điều như là một công cụ để “cắt” các vật thể ra từng phần nhỏ, để nghiên cứu. Các nhóm đối đồng điều giống như các “mật mã” chỉ ra cách gắn kết các phần nhỏ trong vật thể. Có nhiều công cụ để thể hiện ý tưởng đó, mà một trong chúng được gọi là đối đồng điều kì dị. Các lý thuyết đối đồng điều mở rộng chất lọc ra các tính chất của các đối tượng tôpô và thể hiện chúng trong ngôn ngữ của lý thuyết nhóm. Một trong những lý thuyết đối đồng điều mở rộng quan trọng nhất là K -lý thuyết tôpô, được phát triển bởi Atiyah (Giải thưởng Fields năm 1966) và Hirzebruch, mà kết quả quan trọng bậc nhất là tìm ra mối liên quan chặt chẽ giữa đối đồng điều kì dị và K -lý thuyết tôpô. Trong hình học đại số, các đối tượng nghiên cứu chủ yếu là các đa tạp đại số, tức là các nghiệm chung của một hệ phương trình đa thức. Các đa tạp đại số có thể biểu diễn bởi các đối tượng hình học như đường cong, mặt, nhưng chúng “cứng” hơn các vật thể tôpô (nghĩa là khó biến đổi để nhận được vật thể này từ vật thể khác), nên các lý thuyết đối đồng điều đã phát triển trong trường hợp tôpô không

áp dụng được cho trường hợp đại số. Trong khoảng 40 năm, các nhà toán học đã cố gắng để xây dựng một lý thuyết đối đồng điều tốt cho các đa tạp đại số, mà dễ hiểu nhất là K -lý thuyết đại số. Thành tựu xuất sắc nhất đạt được khi Voevodsky xây dựng, dựa trên những ý tưởng khó hiểu của Andrei Suslin, một lý thuyết “đối đồng điều mô-tiv”. Hơn nữa, Voevodsky đưa ra một cách mô tả nhiều lý thuyết đối đồng điều mới cho các đa tạp đại số. Công trình của ông là một bước tiến quan trọng theo con đường của Grothendieck nhằm nhất thể hoá toán học.

Một trong các hệ quả của công trình của Voevodsky, cũng là một trong các thành tựu kiệt xuất nhất của ông, chính là việc giải giả thuyết Milnor (giải thưởng Fields 1972), tồn tại 30 năm như là một trong những giả thuyết chính của K -lý thuyết đại số. Kết quả đó của Voevodsky là một hệ quả kỳ lạ của nhiều lĩnh vực, kể cả lý thuyết đối đồng điều Galois, các dạng toàn phương, đối đồng điều các đa tạp đại số phức. Công trình của Voevodsky chắc chắn sẽ có ảnh hưởng rộng lớn và lâu dài trong toán học, vì những bộ máy mạnh mẽ đã xây dựng trong tô-pô bây giờ có thể đưa vào áp dụng cho các đa tạp đại số.

Lý thuyết của Voevodsky, theo đánh giá của Ban Giải thưởng Fields, là một bước tiến đáng kể trong việc khẳng định cách nhìn của Grothendieck về sự thống nhất của toán học. Đúng như Phillip Griffiths, Viện trưởng Viện nghiên cứu cao cấp Princeton nhận định: “Vladimir Voevodsky là nhà toán học rất tài năng, người đã giải quyết những vấn đề khó nhất trong hình học đại số trừu tượng. Những nghiên cứu của ông có ảnh hưởng đến sự phát triển của hình học đại số và tô-pô, và dẫn đến lời giải nhiều bài toán nổi tiếng”.

Voevodsky sinh ngày 4 tháng 6 năm 1966 tại Nga, tốt nghiệp trường Đại học tổng hợp Lô-môn-ô-xốp (Matxcova) năm 1989. Sau khi tốt nghiệp đại học ở Matxcova, ông sang làm nghiên cứu sinh của đại học Harvard (Mỹ) dưới sự hướng dẫn của David Kazdan, cũng là một giáo sư cũ của trường đại học Lô-môn-ô-xốp, Matxcova. Năm 1992 Voevodsky bảo vệ luận án tiến sĩ với đề tài “*Đối đồng điều các lược đồ và mô-tiv hiệp biến*”. Sau khi nhận bằng tiến sĩ, ông được mời làm việc ở nhiều trung tâm toán học nổi tiếng nhất thế giới: Viện nghiên cứu cao cấp (IAS) Princeton, Đại học Harvard, Viện toán học Max-Planck Bonn, và kể từ năm 2002, Voevodsky chính thức trở thành giáo sư của Viện nghiên cứu khoa học cao cấp (IAS) ở Princeton. Ông lãnh đạo chương trình nghiên cứu lý thuyết đồng luân mô-tiv của Viện IAS.

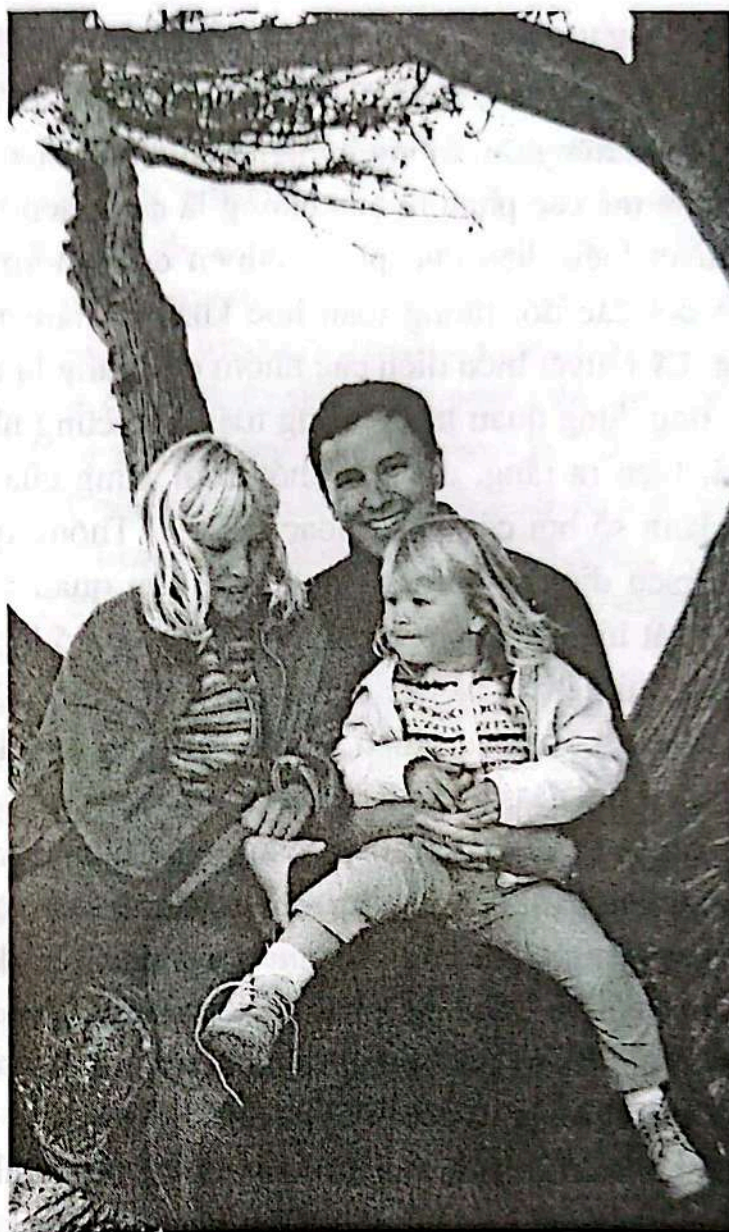
Vladimir Voevodsky nhận được giải thưởng của Viện toán học Clay các năm 1999, 2000, và Giải thưởng Fields năm 2002.

ANDREI OKOUNKOV

GIẢI THƯỞNG FIELDS 2006



Andrei Okounkov được tặng Giải thưởng Fields vì “*những đóng góp nhằm nối liền xác suất, lý thuyết biểu diễn và hình học đại số*”. Chỉ riêng câu đó trong lời giới thiệu khi Okounkov nhận Giải thưởng Fields cũng đủ nói lên tầm quan trọng của các kết quả của ông, cũng như ảnh hưởng rộng lớn của các kết quả đó trong những ngành khác nhau của toán học. Tuy nhiên, có thể người ta càng ngạc nhiên hơn khi biết rằng, “*chiếc cầu nối*” mà anh bắc qua các miền đất khác nhau đó lại dựa trên một bài toán mà thoạt nhìn có thể nghĩ là rất “*sơ cấp*”: bài toán *phân hoạch một số tự nhiên*.



Những ai đã từng học qua các lớp chuyên toán chắc không

dưới một lần gặp bài toán sau đây: Viết số tự nhiên n dưới dạng tổng các số tự nhiên. Chẳng hạn,

$9 = 1 + 2 + 3 + 3 = 1 + 1 + 7 = 2 + 3 + 4 = \dots$ là các cách phân hoạch khác nhau của số 9. Nhưng chắc không mấy người nghĩ rằng, đó lại là bài toán ẩn chứa trong rất nhiều vấn đề sâu sắc của toán học. Thiên tài của Okounkov chính là ở chỗ đó: Ông nhìn thấy bài toán phân hoạch số tự nhiên có mặt ở khắp nơi, từ xác suất đến hình học đại số, từ cơ học thống kê đến lý thuyết trường.

Các kết quả của Okounkov đã cho người ta nhận ra những mối liên hệ mới và sâu sắc giữa những lĩnh vực khác nhau, và dội một ánh sáng mới lên những vấn đề của vật lý. Mặc dù khó mà phân loại các công trình của ông vì chúng đụng chạm đến nhiều lĩnh vực, có hai chủ đề rõ nhất: tính ngẫu nhiên và các tư tưởng cổ điển của

lý thuyết biểu diễn. Sự kết hợp đó đã chứng tỏ sức mạnh của mình qua việc tấn công giải quyết các bài toán của hình học đại số và cơ học thống kê.

Một trong những đối tượng nghiên cứu chính của lý thuyết biểu diễn là các nhóm đối xứng, mà các phần tử của chúng là các phép thế của những đối tượng nào đó. Lý thuyết biểu diễn cho phép nghiên cứu nhóm đối xứng bằng cách biểu diễn chúng bởi các đối tượng toán học khác để làm rõ các tính chất quan trọng của chúng. Lý thuyết biểu diễn các nhóm đối xứng là một lĩnh vực phát triển mạnh, có nhiều ứng dụng quan trọng trong toán học cũng như trong cơ học lượng tử. Người ta phát hiện ra rằng, đối với nhóm đối xứng của n phần tử, tất cả các biểu diễn được đánh số bởi các phân hoạch của n . Thông qua ngôn ngữ phân hoạch đó, lý thuyết biểu diễn được đặt trong mối liên quan với tổ hợp. Mặt khác, tính ngẫu nhiên xuất hiện trong tổ hợp khi ta xét một số lượng rất lớn các đối tượng, chẳng hạn như khi xét tất cả các phân hoạch của một số rất lớn. Nếu ta hình dung việc phân hoạch một số tự nhiên như là phép tách ngẫu nhiên số đó thành các số nhỏ hơn, thì có thể đặt câu hỏi, xác suất để nhận được một phân hoạch đặc biệt nào đó là bao nhiêu? Vấn đề tương tự cũng xuất hiện trong lý thuyết biểu diễn các nhóm đối xứng lớn. Mối liên hệ như vậy giữa xác suất và lý thuyết biểu diễn đã được xét đến trong công trình của các nhà toán học Nga khoảng những năm 1970, 1980. Mấu chốt nằm ở chỗ xem phân hoạch như là biểu diễn của nhóm đối xứng. Trong những người tham gia hướng nghiên cứu đó ở trường đại học tổng hợp Maxcova, có lẽ Okounkov là người hiểu rõ nhất về bài toán phân hoạch đó, và với vốn kiến thức uyên bác đặc biệt, anh sử dụng nó để tìm ra những kết quả sâu sắc, những con đường bất ngờ để giải quyết những vấn đề trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Giống như ông bà ta thường nói *“nhất nghệ tinh, nhất thân vinh”*, cái *“nghệ”* tinh nhất của Okounkov chính là bài toán phân hoạch số tự nhiên, nhưng anh không chỉ *“tinh”* ở đó, mà còn tinh ở hầu hết các lĩnh vực khác. Những kỹ thuật mới về phân hoạch ngẫu nhiên số nguyên đã giúp Okounkov đi đến những kết quả kỳ lạ trong nhiều lĩnh vực: tô pô các không gian môđul, lý thuyết ergodic, lý thuyết các mặt ngẫu nhiên và hình học đại số.

Một trong những kết quả xuất sắc đầu tiên của Okounkov liên quan đến các *“ma trận ngẫu nhiên”*, một đối tượng được nghiên cứu rất nhiều trong vật lý. Ngay từ năm 1950, các nhà vật lý nghiên cứu những tính chất thống kê của các giá trị riêng của ma trận ngẫu nhiên để tìm hiểu vấn đề tiên đoán và phân bố mức năng lượng của hạt nhân. Trong những năm gần đây, ma trận ngẫu nhiên lại lôi cuốn sự chú ý của các nhà vật lý và toán học. Okounkov đã sử dụng ý tưởng từ lý thuyết trường

lượng tử để chỉ ra mối liên hệ đáng ngạc nhiên giữa các ma trận ngẫu nhiên và các dãy con tăng trong phép thế của các số. Có thể minh họa như sau : Cho một phép thế của các số từ 1 đến 9, chẳng hạn 132569784. Phép thế này có các dãy con tăng là: 125678, 12569, 13569, 3569,... Có thể sắp xếp các dãy con tăng theo thứ tự độ dài của chúng (chẳng hạn trong ví dụ trên, dãy thứ nhất có độ dài là 6, dãy thứ hai có độ dài 5,...). Okounkov chứng minh một kết quả bất ngờ nói rằng, luật phân bố xác suất của độ dài dãy con tăng lớn nhất của phép thế n số cũng hoàn toàn trùng với luật phân bố xác suất của giá trị riêng lớn nhất của ma trận ngẫu nhiên $n \times n$, nếu n đủ lớn. Điều đáng ngạc nhiên là Okounkov đã chứng minh kết quả đó nhờ việc chứng tỏ hai vấn đề nêu trên chỉ là hai cách phát biểu khác nhau của vấn đề mô tả mặt ngẫu nhiên trong hình học đại số. Với công trình đó, Okounkov đã đặt nền móng cho những nghiên cứu về sau của mình, trong đó xác suất, tổ hợp và hình học đại số liên quan mật thiết với nhau.

Các mặt ngẫu nhiên cũng xuất hiện trong các công trình của Okounkov về cơ học thống kê. Ta hãy hình dung quá trình nung chảy dần một tinh thể hình lập phương. Khi đó các góc của nó dần biến mất. Hình học của quá trình nóng chảy có thể được mô tả bởi việc hình dung mỗi góc lập nên từ một chùm rất lớn các khối rất nhỏ. Việc nung chảy tinh thể tương ứng với việc lấy dần các khối nhỏ đó một cách ngẫu nhiên. Okounkov đã nghĩ đến việc phân hoạch các tinh thể thành các khối vô cùng nhỏ tương tự như phân hoạch các số nguyên. Từ đó ông áp dụng phương pháp của mình để phân tích các mặt ngẫu nhiên xuất hiện trong quá trình tinh thể nóng chảy. Okounkov chứng minh rằng, phần đã nóng chảy của tinh thể, nếu chiếu lên một không gian hai chiều sẽ có chu vi là một đường cong đại số (đường cong với phương trình đa thức). Sự liên quan đến hình học đại số thực ở đây là điều mà người ta khó có thể đoán trước được.

Okounkov cùng với Rahul Pandharipande đã viết hàng loạt công trình về hình học đại số đánh số, một lĩnh vực có lịch sử lâu dài, và mới trở lại thời sự trong những năm gần đây trong mối quan hệ với các vấn đề của vật lý. Có một cách phổ biến để nghiên cứu đường cong đại số là biến thiên các hệ số của đa thức xác định đường cong. Nếu thêm vào một số điều kiện nào đó khi biến thiên, ta chỉ nhận được họ hữu hạn đường cong. Vấn đề tính xem có bao nhiêu đường cong – với những điều kiện cho trước nào đó – là vấn đề có lịch sử lâu dài trong hình học đại số (hình học đại số đánh số), và gần đây là trong vật lý (*lý thuyết dây*). Okounkov đã dựa vào một số ý tưởng trong vật lý và các công cụ mạnh mẽ của đại số, tổ hợp và hình học để đạt đến nhiều kết quả mới trong hình học đại số đánh số.

Okounkov có những đóng góp to lớn vào lĩnh vực tổ hợp tiệm cận. Ông chứng minh nhiều giả thuyết như giả thuyết của Olshanski về lý thuyết biểu diễn các

nhóm với đối ngẫu vô hạn chiều, giả thuyết Deift–Johansson nói rằng tiệm cận của phân hoạch ngẫu nhiên có phân phối xác suất phù hợp với độ đo Plancherel trùng với phân phối xác suất của các ma trận Hermite lớn.

Andrei Okounkov sinh năm 1969 ở Matxcova, Nga. Anh tốt nghiệp Khoa Toán trường đại học tổng hợp Matxcova và bảo vệ luận án tiến sĩ ở đó năm 1995. Trong bài trả lời phỏng vấn khi nhận Giải thưởng Fields, Okounkov nói rằng, anh thật may mắn *“được là sản phẩm của truyền thống toán học Matxcova”*. Chính trường phái toán học Matxcova đã nhận ra mối liên quan giữa lý thuyết xác suất và lý thuyết biểu diễn từ những năm 1970, và Okounkov là người đã tiếp thu được ý tưởng đó, cũng là người đi xa nhất với việc sử dụng thành công các kết quả về bài toán phân hoạch số tự nhiên.

Okounkov kể rằng, anh hoàn toàn không làm chủ được ngay ý nghĩ khi nhận được điện thoại của Chủ tịch Hội toán học thế giới thông báo về việc anh sẽ được trao Giải thưởng Fields trong Đại hội 2006 ở Madrid. Hai cảm xúc lẫn lộn : vừa thấy quá vinh dự, vừa thấy trách nhiệm quá cao. Anh không thể chờ đợi mà không thông báo ngay cho một số đồng nghiệp (điều bị ‘cấm’ trước khi Đại hội nhóm họp), bởi vì anh thấy rằng, đó là thành công chung của cả nhóm.

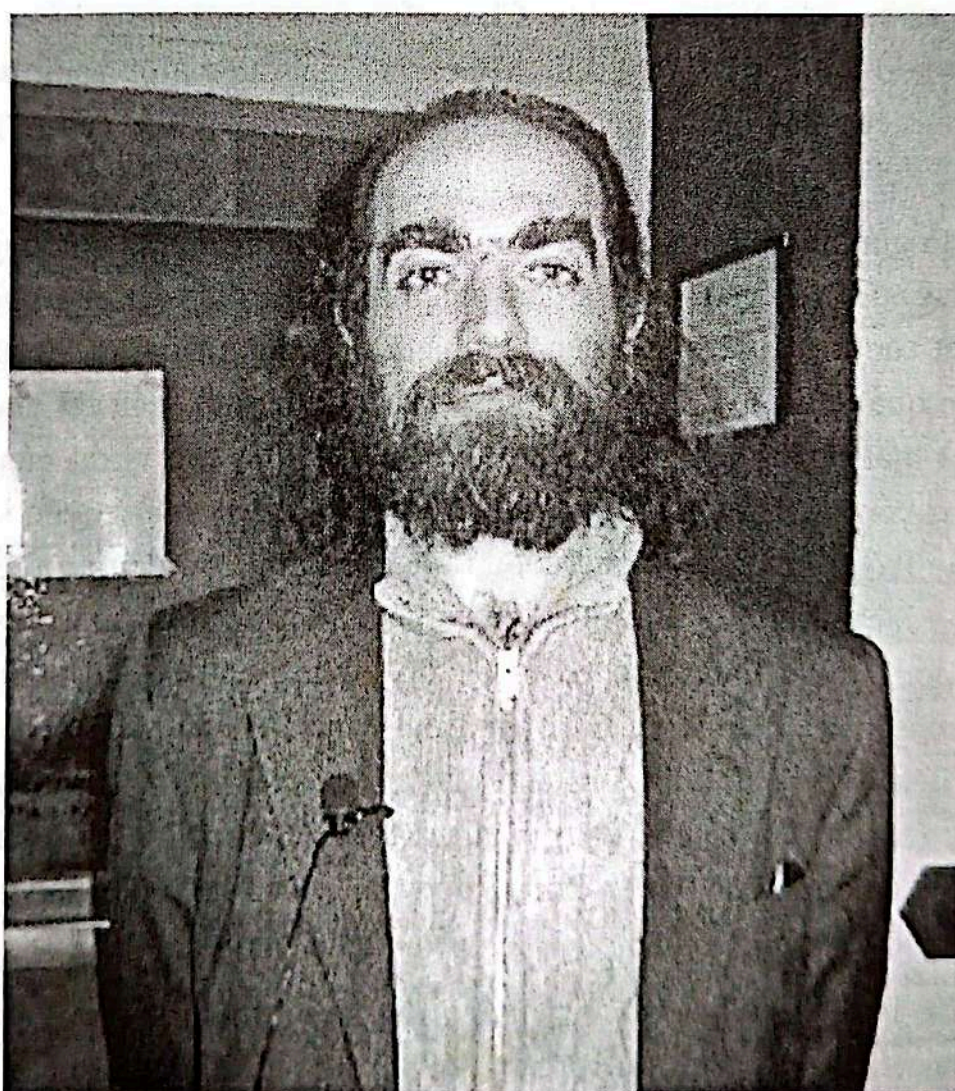
Mặc dù Okounkov bao giờ cũng hết sức giản dị, khiêm tốn, tự coi rằng những thành tựu của mình không hề vượt quá tiêu chuẩn thông thường của các đồng nghiệp trong cùng khoa, mọi người đều nhận xét rằng, *“anh là một người có tư duy mạnh mẽ, phức tạp, nhanh, là người có thiên tài đặc biệt trong việc tổ hợp và giải quyết các bài toán”*. Ngay từ năm 2002, khi Okounkov ứng cử chức giáo sư của đại học Princeton, người ta đã nhận xét rằng *“Andrei Okounkov đã có những đóng góp xuất sắc vào nhiều ngành của toán học... Công trình của anh thật sự gây bất ngờ”*.

Người ta hỏi rằng, có phải anh chỉ làm toán, và tình cờ những kết quả của anh được áp dụng trong vật lý hay không, Okounkov trả lời rằng, anh luôn luôn cố gắng tìm hiểu thế giới và nhìn thế giới bằng con mắt của các nhà vật lý, và vật lý không chỉ đem đến cho toán học những bài toán hay, mà nhiều khi còn gợi ý cho họ để giải quyết các bài toán đó. *Mỗi chứng minh toán học đều phải chứa đựng một ý tưởng mới nào đó. Trong phần lớn trường hợp, người ta không phải tìm kiếm đâu xa, nhưng đôi khi thực sự cần đến những ý tưởng đến từ một lĩnh vực hoàn toàn khác.*

Hiện nay Okounkov là giáo sư của trường đại học Princeton, anh cũng đã từng làm việc tại Viện toán học, Viện hàn lâm khoa học Nga, Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton, đại học Chicago và California ở Berkeley. Năm 2004 Okounkov nhận giải thưởng của Hội toán học châu Âu.

GRIGORY PERELMAN

GIẢI THƯỞNG FIELDS 2006



Perelman được tặng Giải thưởng Fields "vì những đóng góp vào hình học và những hiểu biết mang tính cách mạng về cấu trúc giải tích hình học của các dòng Ricci".

Tên tuổi Perelman đặc biệt nổi tiếng bắt đầu từ khoảng năm 2002–2003, khi ông đưa ra những ý tưởng tuyệt vời trong việc nghiên cứu các phương trình tiến hoá và các kỳ dị của chúng. Điều quan trọng nhất là, các kết quả của ông đã đưa đến sự kết thúc một quá trình lâu dài nhằm giải quyết vấn đề nổi tiếng của tô pô: Giả thuyết Poincaré và giả thuyết hình học hoá của Thurston.

Kể từ khi ra đời (1904), giả thuyết Poincaré được xem là một trong những bài toán quan trọng nhất của toán học. Giả thuyết nhận được sự quan tâm đặc biệt của công chúng từ sau khi Viện toán học Clay xếp nó vào một trong bảy bài toán thế kỷ, và treo giải thưởng một triệu đôla Mỹ cho ai giải được một trong bảy bài toán đó. Công trình của Perelman là công trình đầu tiên cho lời giải của một trong các "bài toán thế kỷ".

Có thể mô tả giả thuyết Poincaré như sau. Ta xét một mặt cầu 2 chiều (như vỏ của một quả bóng). Có thể xem mặt cầu hai chiều như một đĩa trên mặt phẳng, nhưng ta đồng nhất các điểm trên biên của đĩa thành một điểm (giống như ta "gói" cái đĩa thành vỏ quả bóng!). Về "địa phương" tức là trong một mẫu rất nhỏ, mặt cầu hai chiều và mặt phẳng đều như nhau, và chúng đều là các ví dụ của đa tạp hai chiều. Mặt xuyên cũng là một đa tạp hai chiều. Tuy nhiên, mặt xuyên khác cơ bản với mặt cầu: Trong khi mọi đường cong đóng trên mặt cầu đều có thể biến thiên liên tục (bóp lại mà không làm đứt) thành một điểm, thì trên mặt xuyên, tồn tại các đường cong đóng không có tính chất đó (chẳng hạn đường cong đóng bao quanh lỗ thủng của xuyên). Ta nói rằng, mặt cầu là đa tạp *đơn liên*, mặt xuyên không đơn liên. Người ta biết rằng, mọi đa tạp hai chiều đơn liên đều đồng phôi với mặt cầu (tức là đều có thể biến thành mặt cầu qua một phép biến dạng liên tục). Đối với các đa tạp hai chiều không đơn liên, ta có thể phân lớp: Mỗi đa tạp sẽ đồng phôi với một mặt xuyên có 1, 2, ... lỗ thủng.

Bài toán phân lớp đa tạp hai chiều trên đây được các nhà hình học tiến hành theo một cách khác. Ta có thể đưa vào đa tạp một *khoảng cách*. Khái niệm khoảng cách giữa hai điểm tùy ý của đa tạp dẫn đến khái niệm *độ cong*. Khi đó, một đa tạp hai chiều sẽ đồng phôi với mặt cầu hai chiều nếu nó có độ cong dương, đồng phôi với mặt xuyên nếu có độ cong bằng 0, đồng phôi với mặt xuyên với nhiều hơn một lỗ thủng nếu có độ cong âm.

Giả thuyết Poincaré, phát biểu năm 1904, liên quan đến các đa tạp 3 chiều. Một ví dụ cơ bản của đa tạp 3 chiều là mặt cầu 3 chiều. Tương tự như mặt cầu 2 chiều, ta có thể nhận được mặt cầu 3 chiều bằng cách lấy một hình cầu 3 chiều (như quả bóng) rồi đồng nhất biên của nó thành một điểm. Tuy nhiên điều này không thể hình dung trực quan được, vì ta phải đặt quả bóng trong một không gian 4 chiều. Liệu một đa tạp 3 chiều đơn liên có thể biến thiên liên tục thành mặt cầu 3 chiều được không? Giả thuyết Poincaré cho rằng, câu trả lời là khẳng định (tương tự như trường hợp 2 chiều). Thurston (Giải thưởng Fields 1970) đưa ra *giả thuyết hình học* cho việc phân lớp các đa tạp 3 chiều, bao hàm cả giả thuyết Poincaré như một trường hợp đặc biệt. Thurston giả định rằng, các đa tạp 3 chiều cũng có thể phân lớp nhờ hình học như các đa tạp 2 chiều. Thurston xác định và phân tích 8 cấu trúc hình học, và giả thuyết rằng chúng cho cách phân lớp các đa tạp 3 chiều (nghĩa là mỗi đa tạp 3 chiều compact đều thuộc một trong 8 lớp đó). Công trình của ông là một cuộc cách mạng trong hình học và tôpô. Nếu giả thuyết đó là đúng, ta hiểu rất nhiều về không gian 3 chiều mà chúng ta đang sống. Tám cấu trúc hình học của Thurston đã được nghiên cứu kỹ và giả thuyết hình học của Thurston đã được kiểm nghiệm trong nhiều trường hợp riêng. Tuy nhiên hy vọng chứng minh hoàn toàn giả thuyết vẫn còn xa.

Khi giả thuyết Poincaré (3 chiều) chưa được chứng minh, người ta cố gắng chứng minh nó trong những không gian chiều cao hơn, và đó đều là những thành tựu lớn của toán học. Giả thuyết Poincaré cho mặt cầu chiều bằng 5 được Zeeman chứng minh năm 1961, số chiều bằng 6 được Stallings chứng minh năm 1962. Năm 1964 Smale được trao Giải thưởng Fields nhờ chứng minh giả thuyết với các mặt cầu chiều ít nhất là 5. Năm 1986, Friedman nhận Giải thưởng Fields nhờ chứng minh giả thuyết cho mặt cầu 4 chiều (công bố năm 1982). Như vậy, giả thuyết Poincaré cho đến 1982 đã được giải quyết cho các trường hợp chiều cao, nhưng giả thuyết ban đầu cho trường hợp 3 chiều thì vẫn chưa có cách giải quyết.

Năm 1982, Hamilton đưa ra một phương trình tiến hoá đặc biệt, mà ông gọi là *dòng Ricci*, với hy vọng đó sẽ là chìa khoá để chứng minh giả thuyết Poincaré và Thurston. Dòng Ricci tương tự như phương trình truyền nhiệt, chúng mô tả cách các dòng nhiệt từ chỗ nóng đến chỗ lạnh để cuối cùng thuần nhất hoá nhiệt độ trong toàn vật thể. Tư tưởng của Hamilton là dùng các dòng Ricci để thuần nhất hoá một đa tạp 3 chiều, để đi đến chứng minh rằng tính chất hình học của nó đã được liệt kê vào một trong 8 cấu trúc của Thurston. Điều này có lẽ tương tự như ta

nung một khối kim loại không đồng chất đến một nhiệt độ nào đó để các chất hoà vào nhau, đưa đến một vật thể tương đối thuần nhất, rồi làm lạnh quá trình.

Trong hơn 20 năm, Hamilton và các nhà giải tích hình học đã thu những tiến bộ đáng kể trong việc nghiên cứu các dòng Ricci. Tuy nhiên, họ gặp một trở ngại lớn là làm thế nào để giải quyết được tại các *điểm kỳ dị*.

Đó là tình hình trước khi Perelman bước vào lĩnh vực này. Trong một loạt bài báo đưa lên internet cuối năm 2002 (mà cho đến nay vẫn không công bố ở bất kỳ đâu), Perelman đã thu được những kết quả vang dội về dòng Ricci và các kỳ dị của chúng. Ông đưa ra những phương pháp mới để phân tích cấu trúc các kỳ dị, và chỉ ra chúng liên quan như thế nào đến tô pô của đa tạp. Perelman đã khai thông ngõ cụt trong chương trình của Hamilton. Mặc dù công trình của Perelman đặt dấu chấm hết cho chứng minh các giả thuyết đã nêu, đóng góp của ông không chỉ dừng lại ở đó. Các kỹ thuật mà Perelman sáng tạo nên để khắc phục kỳ dị của các dòng Ricci có triển vọng tuyệt vời trong giải tích hình học và đang được bắt đầu sử dụng để giải quyết những bài toán quan trọng khác. Sự kết hợp giữa tư duy sâu sắc với kỹ thuật tuyệt vời đã đưa Perelman lên hàng những nhà toán học kiệt xuất nhất. Với việc làm sáng tỏ con đường để trả lời hai bài toán cơ bản của tô pô 3 chiều, ông có ảnh hưởng sâu sắc trong toán học.

Grigori Perelman sinh ngày 13 tháng 6 năm 1966 ở Leningrad (nay là Saint Petersburg). Tài năng toán học của ông bộc lộ khá sớm: Perelman đoạt huy chương vàng tại Olympic toán quốc tế năm 1982, với điểm tuyệt đối 42/42.

Sau khi tốt nghiệp đại học và làm nghiên cứu sinh tại trường đại học Leningrad, Perelman làm việc tại Viện toán học Steklov, phân viện Leningrad của Viện hàn lâm khoa học Liên Xô. Ông từng nhiều lần sang Mỹ, làm việc tại đại học New York ở Stony Brook, đại học California ở Berkeley. Từ năm 1995, ông lại trở về Viện toán học Steklov.

Kể từ năm 2003, các kết quả của Perelman lôi cuốn sự chú ý rộng rãi của cộng đồng toán học. Ông được mời đến thăm và trình bày các nghiên cứu của mình tại Viện công nghệ Massachusetts (MIT), các đại học Princeton, New York, Columbia, Harvard. Tuy nhiên, người ta rất ngạc nhiên vì sau khi trở về Nga, ông ngừng trao đổi e-mail với các đồng nghiệp. Trong toán học chưa từng có ai như Perelman: Tung ra một chứng minh gây chấn động, rồi "*biến vào khu rừng Nga, để mặc thế giới toán học kiểm tra xem chứng minh có đúng không! Grisha, anh đâu rồi?*" (lời một tờ báo Mỹ viết về Perelman).

Giả thuyết Poincaré, một trong những giả thuyết khó nhất và quan trọng của toán học, giả thuyết đưa lại nhiều Giải thưởng Fields nhất cho toán học, cũng chính là giả thuyết gây nên nhiều nhất những chuyện ít thấy trong giới toán học. Tháng 6 năm 2006, *Tạp chí toán học Châu Á* đăng công trình của hai nhà toán học người Trung Quốc là Xi-Ping Zhu và Hual-Dong Cao với nhan đề "*Chứng minh đầy đủ giả thuyết Poincaré và giả thuyết hình học: ứng dụng của lý thuyết Hamilton-Perelman về dòng Ricci*". Công trình gây khá nhiều tranh cãi trong cộng đồng toán học. Theo cách mà Zhu và Cao, cũng như người hướng dẫn luận án tiến sĩ của Cao, Shing-Tong Yau (Giải thưởng Fields 1982), thì dường như Zhu và Cao mới là những người chứng minh giả thuyết Poincaré, còn Perelman chỉ đưa ra một chương trình. Hơn nữa, công trình được đăng trong một thời gian ngắn kỷ lục, và không ai trong ban biên tập, ngoài Tổng biên tập là Yau, biết được bài báo trước khi nó in ra. Theo ý kiến phân đông chuyên gia, thì Zhu và Cao chỉ làm việc là viết lại rõ ràng những gì mà Perelman đã làm, những trình bày quá cô đọng. Cũng chính vì cách viết của Perelman như vậy mà thế giới toán học phải mất đến ba năm trước khi khẳng định chứng minh của ông là đúng. John Morgan, người trình bày một bài giảng về giả thuyết Poincaré tại Đại hội toán học thế giới vừa qua, nói rằng ông và Gang Tian đã phải viết một cuốn sách dày 450 trang để giải thích khoảng 60 trang của Perelman. Khi được hỏi là công lao giải giả thuyết Poincaré có thể quy cho một số người, trong đó có Perelman, hay chỉ một mình Perelman, Morgan đã trả lời dứt khoát rằng: "*theo văn hoá toán học xưa nay thì chỉ có thể coi đó là công của Perelman*". Có lẽ điều đó cũng tương tự như trong bóng đá: Người ta nói bàn thắng là của người đã xút bóng vào lưới, mặc dù nói cho cùng thì đó là công lao của nhiều người, đặc biệt là người có quả chuyên quyết định. Theo Morgan, "*điều tuyệt vời không phải là ở chứng minh cuối cùng của giả thuyết, một chứng minh mà ai cũng thấy là đúng, mà là ở phương pháp chứng minh*".

Kleiner, giáo sư đại học Yale nói: "*Đây là một thời khắc vĩ đại của toán học. Nó có thể chỉ xảy ra sau 100 năm nữa, hoặc là không bao giờ!*".

Tháng 6 năm 2006, ông Chủ tịch Hội toán học thế giới thông báo cho Perelman biết là ủy ban Giải thưởng Fields vừa quyết định trao cho anh giải thưởng cao quý đó. Đích thân ông chủ tịch đến Saint Petersburg để thuyết phục Perelman nhận giải thưởng, vì đã phong thanh nghe Perelman nói là sẽ từ chối nếu được trao giải đó! Trước đây, Perelman cũng đã từng từ chối nhận giải thưởng của Hội toán học

châu Âu. Perelman nói rằng, “Nếu mọi người hiểu rằng chúng mình là đúng thì không cần có sự thừa nhận nào khác nữa”.

Người ta nói rằng, Perelman đã quyết định từ bỏ toán học. Theo nhiều nguồn tin, vào mùa xuân năm 2003, Perelman hơi bị sốc vì Viện toán học Steklov không bầu lại anh với cương vị là nghiên cứu viên của Viện. Nếu theo những “tiêu chuẩn” nào đó thì có vẻ như quyết định đó cũng có phần hợp lý: kể từ năm 1995, Perelman không có bất kỳ công trình đăng báo nào! Mà chúng mình giả thuyết Poincaré (cũng chỉ đưa lên internet chứ không đăng ở đâu) lúc đó không phải ai cũng tin là đúng. Một vài người bạn thân nói rằng, kể từ lúc đó, anh thấy đau đớn khi nói về toán học. Con người lỗi lạc ấy cuối cùng sống với mẹ già trong một căn hộ chật hẹp bằng đồng lương hưu ít ỏi của mẹ.

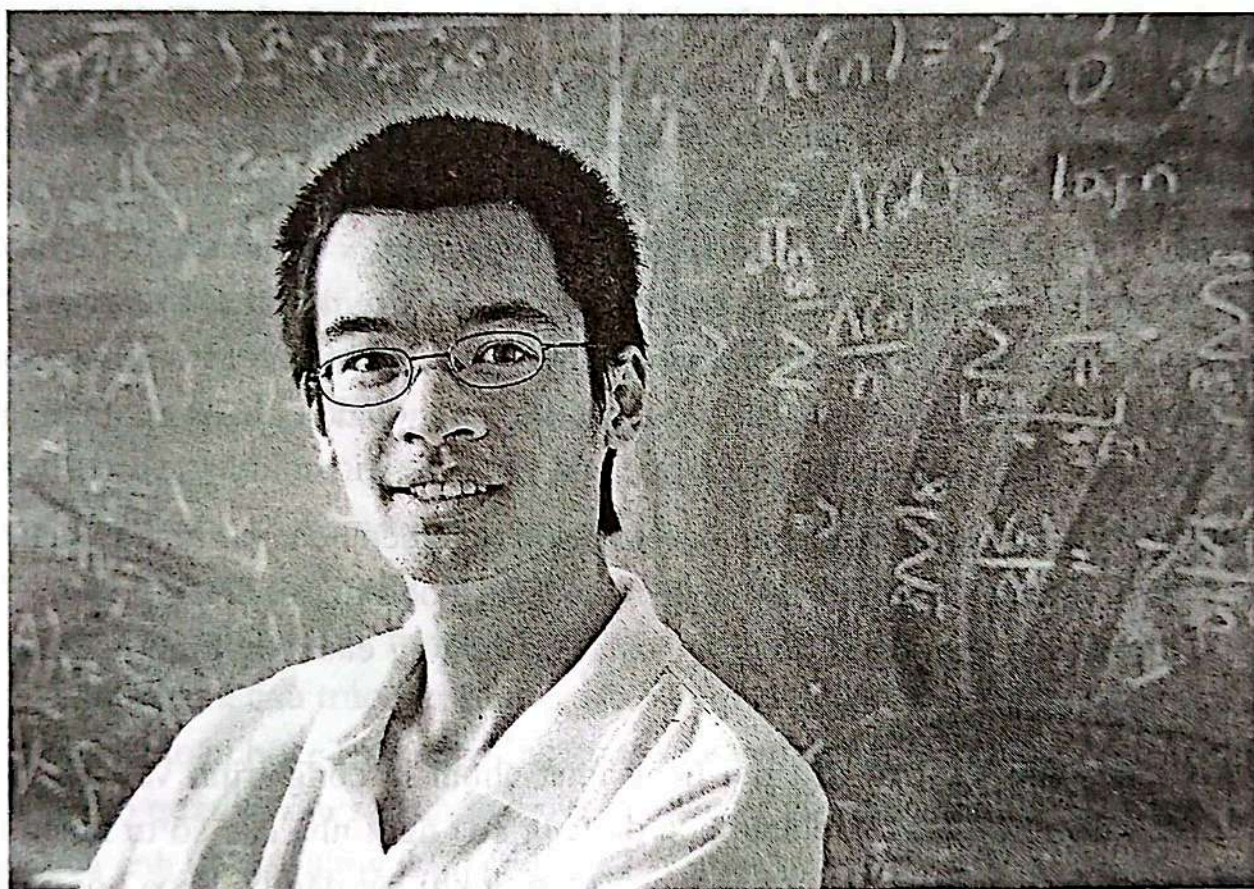
Giáo sư Marcus du Sautoy của đại học Oxford nói: “Anh thuộc kiểu người tự mình xa lánh cộng đồng toán học. Anh đã vỡ mộng với toán học, và điều đó thật đáng buồn. Anh không quan tâm đến tiền tài. Giải thưởng lớn nhất đối với anh là chứng minh định lý của mình”.

Sự kiện Perelman rời bỏ toán học thật đáng tiếc, nhưng ngẫm ra, hình như anh cũng có cái lý nào đó. Giải được bài toán tồn tại 100 năm của toán học, có cần làm gì thêm nữa không? Nhất là đối với anh, một con người không ham danh vọng, không màng vật chất. Với anh, chỉ có chứng minh được các chân lý mới là niềm hạnh phúc duy nhất, ngay cả khi cộng đồng chưa thừa nhận. Liệu đến bao giờ toán học mới lại có thể mang đến cho anh niềm vui lớn như là chứng minh Giả thuyết Poincaré?

Những ai từng gần gũi Perelman đều nói rằng, anh là người sống nhiều về nội tâm, chơi đàn violon và piano rất giỏi, cũng là một cây vợt bóng bàn có tài.

TERENCE TAO

GIẢI THƯỞNG FIELDS 2006



Người ta gọi Terence Tao là “Mozart của toán học”, điều đó quả không sai: anh thật là một thần đồng. Tao bắt đầu vào học trung học năm 8 tuổi, và đến năm 11 tuổi thì anh đã biết đến giải tích toán học. Cũng năm đó, Tao tham dự kỳ thi Olympic toán học quốc tế và đạt huy chương đồng. Anh tiếp tục tham gia Olympic trong hai năm tiếp theo, và lần lượt đạt huy chương bạc và huy chương vàng. Cho đến nay, Tao là người trẻ nhất đạt huy chương vàng trong kỳ thi Olympic toán học quốc tế (ở tuổi 13). Tao nhận bằng tiến sĩ của đại học Princeton năm anh tròn 21 tuổi, và trở thành giáo sư của đại học California ở Los Angeles năm 24 tuổi. Ở tuổi 31, Tao cũng là một trong những người trẻ nhất được trao Giải thưởng Fields. Hơn nữa, Tao không chỉ giống Mozart ở chỗ tài năng xuất hiện quá sớm, mà nói như giáo sư Garnett, trưởng khoa toán của đại học California khi Tao ứng cử vào chức giáo sư ở đó: *“Toán học như là một dòng tuôn chảy từ con người anh, cũng giống như âm nhạc tuôn ra tự nhiên từ Mozart”*. Và *“những nhà toán học với khả năng như Tao chỉ xuất hiện một lần trong một thế hệ. Có lẽ Tao là nhà toán học giỏi nhất của thế giới bây giờ”*. Những lời đó dành cho Tao năm anh mới tròn 29 tuổi. Ngay khi đó, mọi người ở đại học California đều tin rằng, đã đến lúc họ sẽ có một Giải thưởng Fields, điều mà đại học danh tiếng đó chưa bao giờ có được.

Mối quan tâm của Terence Tao thật là rộng lớn: giải tích điều hoà, vật lý, xác suất, phương trình đạo hàm riêng phi tuyến, tổ hợp, hình học đại số, số học. Trong những công trình của anh, người ta thấy xuất hiện “những cấu trúc hình học mà hầu như không ai hiểu”.

Có lẽ công trình làm Tao trở nên nổi tiếng nhất chính là công trình về các số nguyên tố. Các số nguyên tố là những hòn đá tảng của ngôi nhà các số tự nhiên, cũng như của số học và toán học nói chung. Vì thế từ khi bắt đầu có khoa học, số nguyên tố luôn là mối quan tâm lớn nhất của toán học. Mặc dù đã được nghiên cứu hàng ngàn năm nay, tập hợp các số nguyên tố vẫn là miền đất chứa nhiều điều điều bí ẩn và bất ngờ nhất. Vì vậy, mỗi một phát hiện mới về các số nguyên tố đều là một phát minh đáng quan tâm. Có thể nói, các kết quả của Tao và đồng nghiệp là phát minh lớn nhất về các số nguyên tố trong khoảng mấy chục năm gần đây. Bởi thế nên công trình của Tao (cùng với Green) về các cấp số cộng trong tập hợp các số nguyên tố được tạp chí *Discover Magazine* bình chọn là một trong 100 phát minh quan trọng nhất của thế giới năm 2004.

Green và Tao chứng minh rằng, tập hợp các số nguyên tố chứa vô hạn cấp số cộng với mọi độ dài hữu hạn, nghĩa là cho trước số tự nhiên k tùy ý, luôn tồn tại vô hạn cấp số cộng gồm k số hạng, mà mỗi số hạng đều là số nguyên tố. Đó quả là điều kỳ lạ, vì cho đến nay cấp số cộng dài nhất được biết mà mọi số hạng đều là số nguyên tố chỉ gồm 24 số hạng. Để đi đến chứng minh của mình, Green và Tao đã dành hai năm để phân tích bốn chứng minh khác nhau của định lý Szemerédi nói rằng, mọi dãy con có mật độ dương của dãy các số tự nhiên đều chứa cấp số cộng độ dài tùy ý. Định lý Szemerédi không áp dụng được cho các số nguyên tố, vì mật độ của dãy số nguyên tố bằng 0. Trong cả bốn chứng minh của định lý Szemerédi, điều quan trọng là tách mỗi đối tượng thành hai phần: cấu trúc và ngẫu nhiên. Một tập hợp có mật độ dương có thể xem là “gần có cấu trúc” (bởi vì các phần tử thuộc tập hợp đó chiếm một tỷ lệ (dương) nhất định trong mỗi dãy độ dài đủ lớn các số tự nhiên), trong khi tập hợp các số nguyên tố là ngẫu nhiên. Vấn đề khó khăn ở đây là làm thế nào để một tập ngẫu nhiên có thể chứa vô hạn cấp số cộng độ dài tùy ý (các cấp số cộng là các tập có cấu trúc). Chứng minh của Tao và Green dựa trên sự phân tích sâu sắc mối quan hệ giữa ngẫu nhiên và cấu trúc. Tại Đại hội toán học thế giới 2006, Tao đăng ký báo cáo nhan đề “*Các cấp số cộng dài trong các số nguyên tố*”, tuy nhiên, khi làm báo cáo anh đổi lại là “*Về cấu trúc và ngẫu nhiên*”, một đề tài mang tầm triết học sâu sắc. Trong báo cáo đó, Tao không chỉ nói về công trình của anh về cấp số cộng, anh nói về mối liên quan giữa ngẫu nhiên và cấu trúc nói chung, với những ví dụ lấy từ hầu hết các lĩnh vực khác nhau của toán học. Thật khó hình dung một con người trẻ tuổi như thế lại có thể có tầm bao quát và sâu sắc như vậy về các vấn đề của toán học. Và điều quan trọng ở đây là anh không dừng lại ở chỗ “triết lý”, mà những phân tích sâu sắc đó dẫn anh đến ý tưởng chứng minh những giả thuyết tồn tại từ lâu trong toán học.

Tao còn nổi tiếng với việc chứng minh giả thuyết Kakeya trong giải tích điều hoà, giả thuyết Horn trong hình học đại số. Có thể mô tả sơ lược giả thuyết Kakeya như sau. Giả sử ta có một cái kim nằm trên một mặt phẳng. Ta hãy hình dung các hình khác nhau có thể quét được khi ta quay dần cái kim sao cho nó làm thành góc 180 độ so với vị trí ban đầu. Hình đó có thể là một nửa đĩa, nhưng nếu khéo léo, ta hoàn toàn có thể thực hiện phép quay mà chỉ quét một diện tích bằng $1/4$ đĩa. Bài toán Kakeya hỏi rằng, diện tích tối thiểu của hình mà ta quét được khi quay cái kim 180 độ là bao nhiêu? Câu trả lời thật đáng ngạc nhiên: diện tích đó có thể nhỏ bao nhiêu tùy ý. Điều đó có nghĩa là ta hoàn toàn có thể quay cái kim một góc 180

độ mà không chiếm tỷ diện tích nào của mặt phẳng! Yếu tố quyết định độ lớn của hình quét được khi quay cái kim chính là chiều fractal của hình đó. Kết quả cơ bản về bài toán Kakeya nói rằng chiều fractal¹⁵ của hình quét được luôn luôn bằng 2. Bây giờ ta hình dung cái kim không nằm trong mặt phẳng, mà nằm trong không gian n chiều. Bài toán Kakeya hỏi rằng, thể tích tối thiểu của hình n chiều là bao nhiêu, nếu cái kim có thể quay trong đó đến hướng tùy ý? Tương tự như trường hợp 2 chiều, thể tích này cũng có thể làm nhỏ vô hạn. Nhưng câu hỏi quan trọng hơn là: chiều fractal của hình n chiều đó là bao nhiêu? Không ai biết câu trả lời. Kỹ thuật đã dùng trong trường hợp 2 chiều không áp dụng được nữa. Bài toán Kakeya chiều cao tự nó đã rất đáng quan tâm, nhưng quan trọng hơn nữa là nó liên quan đến nhiều vấn đề khác của toán học, như giải tích Fourier và sóng phi tuyến. Terence Tao đã có nhiều đóng góp to lớn cho bài toán đó.

Một bài toán lớn khác nằm trong tâm quan tâm của Tao là bài toán tìm hiểu các ánh xạ sóng. Chủ đề này xuất hiện tự nhiên trong những nghiên cứu của Eistein về thuyết tương đối, theo đó lực hấp dẫn là một sóng phi tuyến. Tuy nhiên, không ai biết làm thế nào để giải đầy đủ các phương trình của thuyết tương đối tổng quát mô tả lực hấp dẫn. Các phương trình này trở thành đơn giản hơn nhiều khi ta xét trường hợp riêng, trong đó phương trình có dạng đối xứng trụ. Một khía cạnh của trường hợp đơn giản đó được gọi là vấn đề “ánh xạ sóng” mà Tao đã phát triển một chương trình có thể cho phép người ta hiểu được nghiệm của nó. Ngay khi công trình đó còn chưa đến hồi kết thúc, các ý tưởng của Tao đã cất đi được một gánh nặng tâm lý của những người nghiên cứu vấn đề đó bằng cách chứng tỏ rằng các phương trình là không quá khó, và do đó khơi lại mối quan tâm đối với bài toán quan trọng này của vật lý.

Một số thành tựu khác của Tao tập trung ở hướng các phương trình phi tuyến Schrodinger. Người ta dùng các phương trình đó để mô tả trạng thái của ánh sáng trong một đường ống dẫn quang học. Các kết quả của Tao đã dời một ánh sáng mới lên một loại phương trình Schrodinger đặc biệt và đưa ra kết quả về sự tồn tại nghiệm. Tao viết các công trình đó với bốn đồng nghiệp là James Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani, và Hideo Takaoka.

¹⁵ về chiều Fractal, xem bài “Wendelin Werner, Giải thưởng Fields 2006”.

Tao tự nói về cách mình chứng minh các giả thuyết: “Có nhiều nhà toán học luôn nghĩ rằng, để lấp một chỗ trống nào đó, cần đọc bài báo dài 100 trang này, rồi đến bài báo dài 100 trang kia trước khi bắt đầu. Tôi chọn cho mình một cách tiếp cận khác để giải quyết chỗ trống cơ bản”. Và “Phần lớn các nhà toán học khi đối diện với một bài toán sẽ cố gắng giải nó một cách trực tiếp. Trước khi làm việc với những vấn đề chi tiết, tôi tìm một chiến lược. Khi đã có chiến lược, một bài toán lớn sẽ được chia thành một loạt bài toán nhỏ. Không bao giờ tôi thoả mãn chỉ với việc giải được bài toán, tôi luôn cố tìm hiểu cái gì sẽ xảy ra nếu tôi thay đổi một số điều”.

Có lẽ sức mạnh của Tao chính là ở chỗ tìm thấy triết lý sâu sắc trong mọi vấn đề, và từ triết lý đó, lại đủ khả năng đi đến những chứng minh với kỹ thuật độc đáo, sử dụng những công cụ của nhiều ngành toán học khác nhau. Tao nói: “Tôi là một người ham thích những nghiên cứu liên ngành – lấy những ý tưởng từ một lĩnh vực này để áp dụng cho lĩnh vực khác. Chẳng hạn, công trình của tôi với Green về cấp số cộng gồm các số nguyên tố có được một phần nhờ cố gắng của tôi nhằm tìm hiểu các ý tưởng đằng sau chứng minh định lý Szemerédi của Furstenberg, trong đó ông dùng lý thuyết ergodic. Hoá ra chứng minh đó hoàn toàn phù hợp với số học lý thuyết và các phương pháp của giải tích Fourier mà Green đã có đối với bài toán này...Tôi cố gắng nhìn toán học như là một thể thống nhất, tôi đặc biệt thích thú khi có thể làm việc với một đề tài liên quan đến nhiều lĩnh vực cùng một lúc”.

Ở tuổi 31, Tao đã viết hơn 80 bài báo với 30 đồng nghiệp. Anh hoà nhập rất nhanh vào những vấn đề đang nghiên cứu của các đồng nghiệp, dù họ làm trong lĩnh vực nào. Một ví dụ điển hình là anh đã từng cộng tác với Candles, một nhà toán học ứng dụng ở trường công nghệ California (Caltech) để nghiên cứu về vấn đề xử lý tín hiệu. Nhiều kết quả xuất hiện khi họ chơi đùa với trẻ con ở nhà trẻ của trường California.

Tao phát biểu trong buổi nhận giải thưởng Clay: “Sự hợp tác là rất quan trọng đối với tôi, vì nó làm cho tôi học được nhiều lĩnh vực khác, ngược lại, tôi cũng chia sẻ với các đồng nghiệp những hiểu biết trong lĩnh vực của mình...Hợp tác làm phong phú hơn kinh nghiệm của tôi, không chỉ trong ý nghĩa các kỹ thuật toán học, mà còn là triết lý của các nghiên cứu”.

Terence Tao sinh ngày 17 tháng 7 năm 1975 ở Adelaide, Australia, nơi mà gia đình anh vừa chuyển đến từ Sài Gòn trước đây không lâu. Tao nhận bằng cử nhân và thạc sĩ của đại học Flinders, rồi làm nghiên cứu sinh ở Princeton từ 1992 đến 1996.

Tao được tặng Giải thưởng Salem năm 2000, Giải thưởng Bocher năm 2002, giải thưởng của Viện Clay năm 2003 vì những đóng góp của anh cho giải tích, bao gồm cả việc chứng minh giả thuyết Kakeya. Năm 2004 Tao cùng với Green được tặng Huy chương của Hội toán học Australia về công trình cấp số cộng dài tùy ý gồm các số nguyên tố. Năm 2005 anh nhận Giải thưởng Levi Conant của Hội toán học Mỹ, và năm 2006, Giải thưởng Fields.

Terence Tao yêu thích toán học ngay từ khi mới lên 2 tuổi. Toán học trong mắt Tao thay đổi theo từng năm tháng. *“Khi tôi còn nhỏ, tôi thường thấy toán học rất lãng mạn – những vấn đề khó được giải quyết trong một thời điểm “ơêka”...Bạn làm mãi, làm mãi, và thường bạn có bước tiến trong việc giải bài toán khi tìm ra một cổng sau ở đâu đó...Ồ, thế là xong bài toán!...Cha tôi kể rằng tôi thích các con số từ khi mới lên hai. Tôi nhớ là lũ trẻ thường rất say mê với các trò chơi xếp hình với các ký hiệu toán học. Khi ở trung học, tôi bắt đầu tìm hiểu ý nghĩa và mục đích của toán học, mối liên hệ của nó với thế giới thực tại...Sự thật thì bây giờ tôi say mê với chiều sâu của toán học hơn là giải quyết các bài toán hoặc là các khía cạnh hình thức của nó”*.

Mỗi thời điểm, Tao thường chỉ tập trung giải một vấn đề, nhưng luôn giữ sẵn trong đầu hàng chục vấn đề, *“hy vọng rằng một ngày nào đó tôi sẽ tìm ra con đường giải nó. Nếu có vấn đề nào đó có vẻ như tôi có thể giải, nhưng chưa giải được, thì tôi thấy rất bứt rứt”*.

Nhiều nghiên cứu của Tao có liên quan đến các vấn đề của vật lý. Khi được hỏi về vai trò của toán học trong phát triển vật lý, Tao nhắc lại rằng: *“Khi Eistein phát triển thuyết tương đối, ông cần đến lý thuyết các không gian đường cong. Eistein phát hiện ra rằng, các nhà toán học đã xây dựng nên đúng lý thuyết đó hơn 30 năm trước”*.

WENDELIN WERNER

GIẢI THƯỞNG FIELDS 2006



Cho đến nay, Wenderlin Werner là người đầu tiên nghiên cứu trong lĩnh vực xác suất được trao Giải thưởng Fields.

Wenderlin Werner được tặng Giải thưởng Fields “vì những đóng góp vào việc phát triển luật tiến hoá Loew, hình học các chuyển động Brown và lý thuyết trường bảo giác”.

Công trình của Werner và các cộng sự được xem là một trong những sự tương tác tuyệt vời và hiệu quả nhất giữa vật lý và toán học trong thời đại ngày nay. Những nghiên cứu của Werner đã phát triển một quan điểm mới để hiểu các hiện tượng tới hạn xuất hiện trong các hệ thống vật lý, và làm rõ nhiều tính chất hình học mà trước đây bị bỏ qua. Các ý tưởng vật lý xuất hiện trong các công trình của Werner, kết hợp với lý thuyết xác suất và những tư tưởng của giải tích phức cổ điển đã có một ảnh hưởng quan trọng trong cả toán học và vật lý, và có mối liên hệ tiềm năng với nhiều lĩnh vực rộng lớn của ứng dụng.

Những nghiên cứu của Wendelin Werner được khởi nguồn từ những vấn đề của vật lý thống kê, trong đó lý thuyết xác suất được dùng để phân tích các trạng thái của các hệ thống lớn, phức tạp, bao gồm nhiều hạt. Sau đây là một ví dụ điển hình của một hệ như vậy: Ta không thể biết vị trí của từng phân tử khí riêng rẽ trong phòng ta đang ngồi, nhưng trong những điều kiện nào đó, ta có thể nói chắc rằng mọi phân tử khí sẽ bay về một góc nào đó của phòng. Tồn tại những thời điểm mà các hệ như vậy có sự chuyển pha: chúng thay đổi trạng thái vĩ mô của mình. Chẳng hạn, khi nước sôi, có sự chuyển pha từ thể lỏng sang thể khí, hoặc khi sắt bị nung nóng đến một nhiệt độ nào đó thì nó trở nên mất từ tính. Ta gọi hiện tượng tại những điểm chuyển pha như vậy là hiện tượng tới hạn. Các hiện tượng tới hạn có thể xuất hiện một cách ngẫu nhiên, với một hệ thống có độ lớn tùy ý. Những hiện tượng tới hạn trong tự nhiên là hết sức phức tạp, và còn xa mới có thể hiểu rõ được.

Năm 1982 nhà vật lý Keneth Wilson nhận Giải thưởng Nobel nhờ những nghiên cứu về hiện tượng tới hạn. Những kết quả của ông cho phép giải thích tính “phổ dụng”: Nhiều hệ thống vật lý khác nhau có những tính chất như nhau khi chúng gần đến điểm tới hạn. Trạng thái đó được mô tả bởi một hàm mà trong đó một đại lượng (chẳng hạn hiệu giữa nhiệt độ hiện tại và nhiệt độ tới hạn) được nâng lên đến một số mũ, gọi là “số mũ tới hạn của hệ thống”. Các nhà vật lý giả thuyết rằng các số mũ tới hạn đó là phổ dụng, theo nghĩa chúng chỉ phụ thuộc vào những đặc

trung định tính nào đó của hệ thống, mà không phụ thuộc kích cỡ của chúng. Mặc dù các hệ thống mà Wilson quan tâm là các hệ thống ba hoặc bốn chiều, nhưng các hiện tượng như vậy cũng xuất hiện trong trường hợp hai chiều.

Trong khoảng những năm 1980 và 1990 các nhà vật lý phát triển mạnh mẽ lý thuyết trường bảo giác. Lý thuyết đó cho một cách tiếp cận các hiện tượng tới hạn hai chiều. Tuy nhiên, cách tiếp cận đó vẫn còn chưa thật đầy đủ nếu đòi hỏi sự chặt chẽ toán học, hơn nữa, nó cũng không cho một bức tranh hình học về trạng thái của hệ thống. Thành tựu to lớn của Wendelin Werner, Lawler và Schramm là đã phát triển một cách tiếp cận mới các hiện tượng tới hạn hai chiều với sự chặt chẽ toán học, đồng thời cho một mô tả hình học của các hệ thống tại điểm tới hạn và trong lân cận điểm đó.

Wendelin Werner cũng là người nhìn ra bản chất toán học giống nhau trong nhiều quá trình vật lý khác nhau. Từ đó, ông mô tả chúng dưới một mô hình toán học duy nhất và cho các phương pháp để nghiên cứu các hiện tượng vật lý đó. Chẳng hạn, trong vật lý người ta thường gặp các hiện tượng có thể mô tả như là chất khí khuyếch tán trong một hệ đường ống mà cái thì khoá, cái thì mở một cách ngẫu nhiên, hoặc như cà phê tan trong cốc nước, hay là sự ô nhiễm nguồn nước bởi các chất lỏng. Câu hỏi đặt ra là các chất lỏng khuyếch tán nằm ở đâu? Các nhà vật lý và toán học thường nghiên cứu lược đồ của việc khuyếch tán như sau : Trước hết, ta hình dung mặt phẳng được lát bởi các viên gạch hình lục giác đều. Ta tung đồng tiền để quyết định hình lục giác nào được tô trắng, lục giác nào tô đen. Giả sử xác suất để một lục giác được tô đen là p , xác suất để được tô trắng là $1-p$. Chọn một điểm của mặt phẳng làm gốc. Có thể đặt ra câu hỏi: những phần nào của mặt phẳng có thể nối liền được với gốc bởi một chuỗi các lục giác màu đen? Một chuỗi như vậy gọi là một "chùm" chứa gốc. Nếu p nhỏ hơn $1/2$, có ít lục giác đen hơn là lục giác trắng, và chùm chứa gốc sẽ hữu hạn. Ngược lại, nếu p lớn hơn $1/2$, có nhiều hy vọng rằng chùm chứa gốc là vô hạn. Như vậy, hệ thống có sự chuyển pha tại giá trị tới hạn $p = 1/2$. Giá trị tới hạn này tương ứng với trường hợp ta dùng một đồng tiền cân đối để chọn cách tô màu. Khi đó, ta có thể chứng minh rằng, mọi chùm là hữu hạn và có thể tìm được (với xác suất cao) các chùm với độ dài lớn tùy ý cho trước.

Mô hình khuyếch tán thu hút sự chú ý của các nhà vật lý, và họ sử dụng nhiều kỹ thuật không thật chặt chẽ để dự đoán tình trạng tới hạn. Đặc biệt, khoảng 15 năm

trước, nhà vật lý John Cardy đã dùng lý thuyết trường bảo giác để tiên đoán một số tính chất vĩ mô của quá trình khuếch tán tại điểm tới hạn. Werner cùng với những cộng sự, Lawler và Schramm đã nghiên cứu quá trình tiến đến giới hạn của thang vĩ mô, tức là khi cạnh của các lục giác ngày càng nhỏ. Họ đã chỉ ra nhiều tính chất của hiện tượng tại giới hạn, chẳng hạn như chiều fractal của biên một chùm. Kết hợp với kết quả của Smirnov năm 2001 về mô hình tán xạ và kết quả trước đó của Kesten, công trình của họ dẫn đến việc mô tả đầy đủ các số mũ tới hạn của mô hình đặc biệt đang xét.

Một mô hình hai chiều khác là chuyển động Brown phẳng, có thể xem như là giới hạn của bước ngẫu nhiên rời rạc. Bước ngẫu nhiên rời rạc mô tả quỹ đạo của một hạt, mà tại mỗi đơn vị thời gian, nó chuyển động theo một hướng ngẫu nhiên. Hình học của quỹ đạo Brown phẳng hết sức phức tạp. Năm 1982, Mandelbrot giả thuyết rằng, chiều fractal của biên ngoài của quỹ đạo Brown là $4/3$ (có thể hiểu sơ lược, điều đó có nghĩa là độ dài thực của quỹ đạo bằng độ dài của đường nếu ta đo “bằng thước kẻ” rồi lấy lũy thừa $4/3$). Việc giải giả thuyết này có vẻ như vượt ra ngoài khuôn khổ các công cụ của xác suất truyền thống. Lawler, Schramm, và Werner đã chứng minh giả thuyết trước hết bằng cách chỉ ra rằng biên ngoài của đường Brown và biên ngoài của chùm khuếch tán liên tục (tại giới hạn) là tương tự, sau đó họ tính chiều fractal của nó bằng cách sử dụng cấu trúc động lực học của chùm khuếch tán liên tục. Cũng bằng phương pháp đó, họ đã đưa ra được giá trị của các “số mũ giao” của chuyển động Brown và của bước ngẫu nhiên đơn giản, đã được giả thuyết trước bởi các nhà vật lý Duplantier và Kwon (một trong các số mũ giao đó mô tả xác suất để các đường của hai bước ngẫu nhiên vẫn còn tách nhau trong một thời gian rất lớn).

Werner nói rằng, *“Điều lôi cuốn nhất trong nghiên cứu bước ngẫu nhiên là tìm ra những luật phổ dụng độc lập với chi tiết vi mô của hiện tượng”*.

Wener và các cộng sự còn thu được những kết quả quan trọng về các mô hình hai chiều bất biến bảo giác (nói nôm na, một đối tượng ngẫu nhiên hai chiều được gọi là bất biến bảo giác nếu nó có cùng luật phân bố với các đối tượng nhận được từ nó qua biến đổi bảo giác).

Wendelin Werner sinh năm 1968 tại Đức, nhưng nhập quốc tịch Pháp từ năm 1977. Anh học tại Ecole Normale Supérieure từ 1987 đến 1991, nhận bằng tiến sĩ năm 1993 tại đại học Paris 6. Từ năm 1991 đến 1997, Werner là nghiên cứu viên

của Trung tâm khoa học quốc gia Pháp (CNRS). Anh nhận chức giáo sư tại đại học Paris 11 (Orsay) từ 1997. Từ năm 2005, anh cũng đồng thời là giáo sư của Ecole Normale Supérieure.



Werner đã được nhận nhiều giải thưởng cao quý: Giải thưởng Rollo Davidson (1998), giải thưởng của Hội toán học châu Âu (2000), Giải thưởng Fermat (2001), Giải thưởng Jacques Herbrandt (2003), Giải thưởng Loève (2005), Giải thưởng Polya (cùng với các đồng nghiệp Lawler, Schramm, 2006), và cuối cùng, Giải thưởng Fields (2006).

Le Gall, người hướng dẫn luận án của Werner nhận xét : *"Wendelin là một người rất say mê, rất năng động. Anh ta hiểu ngay lập tức công cụ cần thiết để giải quyết bài toán"*. Trong các công trình của mình, Werner sử dụng nhiều công cụ khác nhau : lý thuyết tổ hợp, tiếp đó là lý thuyết xấp xỉ, giải tích phức, lý thuyết số, đa thức trực giao, xác suất, mà theo lời của anh, *mấu chốt là việc kết hợp nhiều công cụ đến từ xác suất và giải tích phức*.

Các kết quả của Werner phần lớn nhận được khi làm việc với hai đồng nghiệp là Lawler và Schramm. Hai đồng nghiệp của Werner đều làm việc tại Mỹ, và họ thường chỉ trao đổi qua e-mail, đôi khi cũng gặp nhau khoảng vài ba ngày. Werner nói rằng, cách làm việc như vậy ngày nay đã trở thành cổ điển.

Với bản tính khiêm tốn, Werner cho rằng Giải thưởng Fields đến với anh là điều quá bất ngờ. Werner kể rằng, khi vào một ngày tháng 5 năm 2006, anh được ông chủ tịch Hội toán học quốc tế thông báo qua điện thoại rằng sẽ được trao giải Fields, ý nghĩ đầu tiên ngay sau khi đặt máy xuống là : Giải thưởng không phải dành cho anh, mà cho công trình của anh, tức là những kết quả làm chung với Lawler và Schramm, nhưng tiếc rằng hai người kia đã quá tuổi 40. Werner sung

sướng vì Giải thưởng Fields của anh chứng tỏ ngành xác suất đã có vị trí xứng đáng hơn trong toán học :

“Bức tranh về ngành xác suất đã thay đổi. Các tư tưởng của xác suất đã trở thành quan trọng trong những lĩnh vực khác của toán học. Điều làm tôi cảm thấy khó xử là tôi là người đầu tiên, bởi vì nhiều người trước cũng rất xứng đáng”.

Khi được hỏi rằng Giải thưởng Fields sẽ ảnh hưởng thế nào đến công việc tương lai của anh, Werner nói thật khó dự đoán. Anh hiểu rằng giải thưởng không chỉ là sự đánh giá các kết quả đã nhận được, mà còn là niềm khích lệ cho tương lai. Bởi thế, anh cảm thấy có trách nhiệm nặng nề hơn và một ít sức ép phải tìm ra những kết quả đẹp! Nhưng điều anh hy vọng thật là giản dị: Có thể nhờ Giải thưởng Fields mà sinh viên sẽ đến nghe bài giảng của anh nhiều hơn và chăm chú hơn !

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
Giải thưởng Fields	4
Lars Valerian AHLFORS	17
Jesse DOUGLAS	22
Laurent SCHWARTZ	25
Atle SELBERG	31
Kunihiko KODAIRA	36
Jean-Pierre SERRE	41
Klaus Friedrich ROTH	46
René THOM	50
Lars HORMANDER	56
John Willard MILNOR	60
Michael Francis ATIYAH	65
Paul Joseph COHEN	71
Alexander GROTHENDIECK	75
Stephen SMALE	82
Alan BAKER	87
Heisuke HIRONAKA	91
Sergay NOVIKOV	96
John Griggs THOMPSON	103
Enrico BOMBIERI	108
David Bryant MUMFORD	112
Pierre René DELIGNE	118

Charles Louis FEFFERMAN	123
Gregori Alexandrovitch MARGULIS	127
Daniel G. QUILLEN	131
Alain CONNES	135
William P. THURSTON	139
Shing-Tung YAU	145
Simon K. DONALDSON	151
Gerd FALTINGS	155
Michael H. FREEDMAN	160
Vladimir DRINFELD	164
Vaughan F.R. JONES	168
Shigefumi MORI	172
Edward WITTEN	175
Jean BOURGAIN	179
Pierre-Louis LIONS	182
Jean-Christophe YOCCOZ	186
Efim ZELMANOV	190
Richard E. BORCHERDS	194
W. Timothy GOWERS	198
Maxim KONTSEVICH	202
Curtis T. MCMULLEN	206
Laurent LAFFORGUE	210
Vladimir VOEVODSKY	215
Andrey OKOUNKOV	218
Grigory PERELMAN	223
Terence TAO	229
Wedelin WERNER	235

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty cổ phần đầu tư và phát triển Giáo dục Hà Nội
NGUYỄN XUÂN HOÀ

Biên tập nội dung

TRẦN PHƯƠNG DUNG — HOÀNG XUÂN VINH

Biên tập kĩ thuật :

HOÀNG XUÂN VINH

Trình bày bìa :

TẠ THANH TÙNG

Sửa bản in :

HOÀNG XUÂN VINH

Chế bản :

HOÀNG XUÂN VINH

CÁC NHÀ TOÁN HỌC ĐƯỢC GIẢI THƯỞNG FIELDS

(1936-2006)

Mã số : 8I018M7

In 3.000 cuốn (QĐ71TT), khổ 17 x 24cm, tại Công ty In & Văn hóa phẩm.

Số in: 19/8. Số xuất bản: 183-2007/CXB/12-404/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2007.



CÁC NHÀ TOÁN HỌC
ĐƯỢC
GIẢI THƯỞNG



FIELDS

(1936 - 2006)



Giá : 45.700đ